

TP N° 6

Resumen

Y

Ejercicios

Resueltos

Funciones

Concepto de función

Una gráfica es un conjunto de puntos $(x; y)$ del plano, o sea, relaciona valores de x con valores de y . Cuando en una gráfica **todos** los valores de x de algún intervalo real están relacionados con un **único** valor de y , esa relación es una **función**.

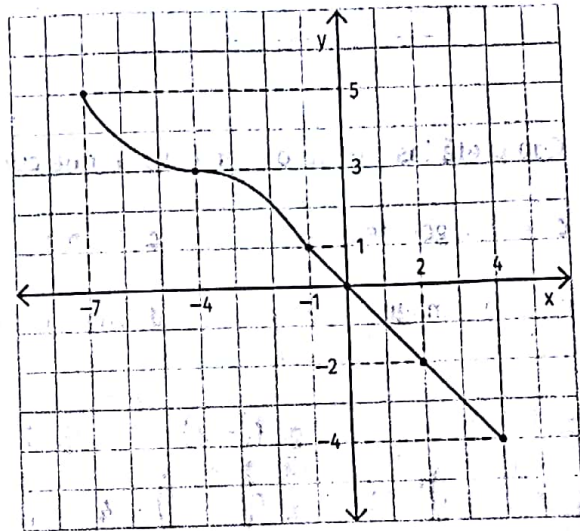
$$f(x) = y \Rightarrow \begin{cases} y \text{ es la imagen de } x \\ x \text{ es la preimagen de } y \end{cases}$$

La gráfica es una función en el intervalo $[-7; 4]$ o para $-7 \leq x \leq 4$

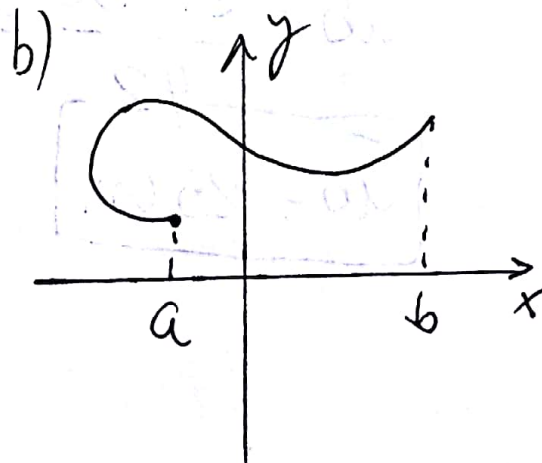
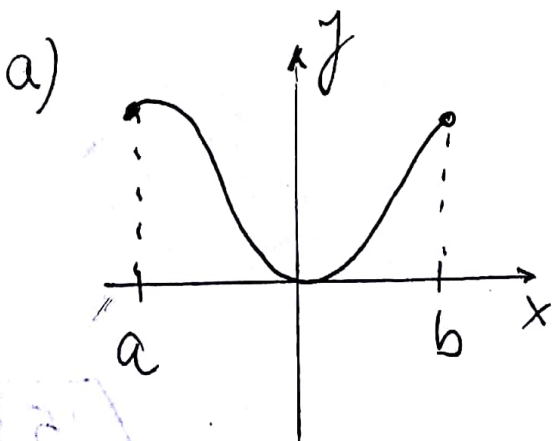
$$f(-4) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ es la imagen de } -4 \\ -4 \text{ es la preimagen de } 3 \end{cases}$$

Algunos puntos de la función:

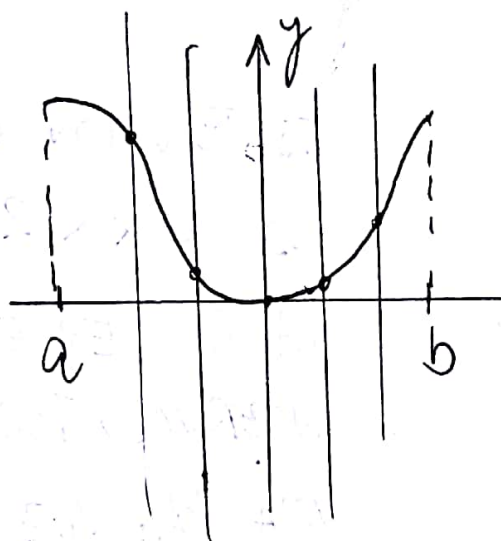
x	$y = f(x)$
-7	5
-4	3
-1	1
0	0
2	-2
4	-4



EJEMPLO 1: DECÍ SI LAS SIGUIENTES GRÁFICAS SON O NO FUNCIONES PARA $a \leq x \leq b$ Y EXPLICA PORQUÉ.

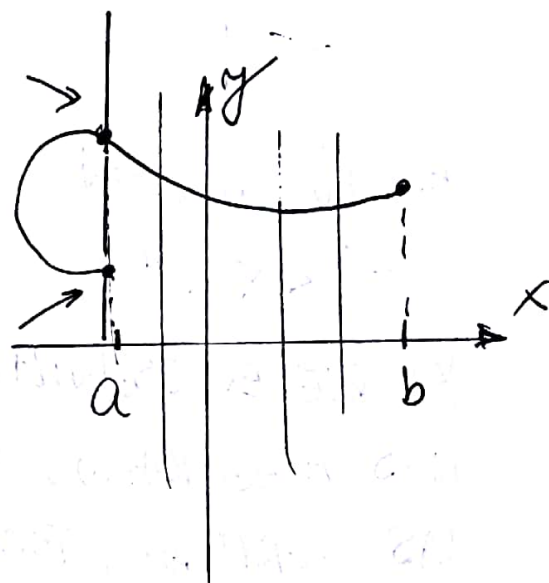


Solución: UN MÉTODO CONOCIDO PARA SABER SI ES FUNCIÓN A PARTIR DEL GRÁFICO; ES TRAZAR RECTAS VERTICALES y SI LAS RECTAS SÓLO CORTAN A LA GRÁFICA EN UN PUNTO. ENTONCES, ES "FUNCIÓN". DE LO CONTRARIO NO ES FUNCIÓN.



COMO PODEMOS OBSERVAR
SÓLO CORTA EN UN SÓLO
PUNTO

ES FUNCIÓN



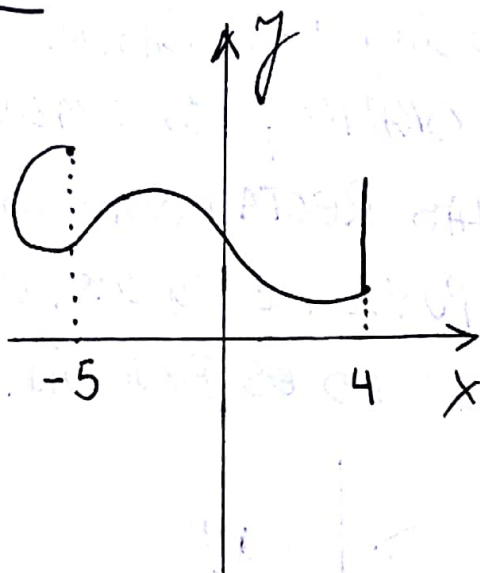
COMO PODEMOS OBSER-
VAR EN $x=a$ LA
RECTA VERTICAL TOCA
DOS VECES.

NO ES FUNCIÓN

PUEDA QUE LA GRÁFICA ES FUNCIÓN EN ALGÚN
INTERVALO y EN OTRO NO.

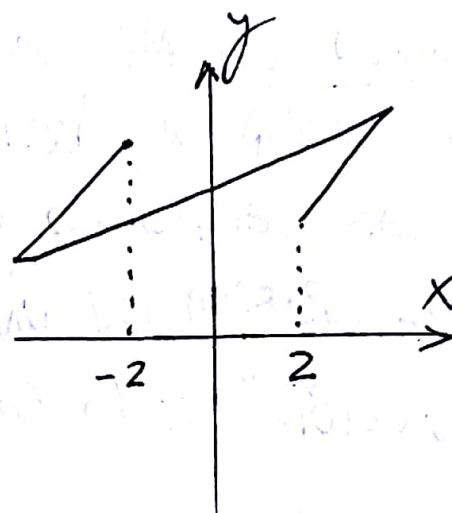
Por ejemplo:

EJEMPLO 2:



ES FUNCIÓN EN
 $-5 < x < 4$

YA QUE EN ESE INTERVALO
 NOS ASEGURAMOS QUE
 LAS VERTICALES TOCAN
 UNA SOLA VEZ.

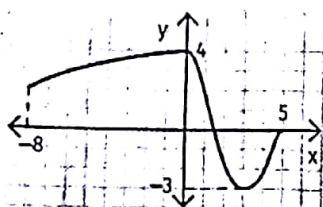


ES FUNCIÓN EN
 $-2 < x < 2$

YA QUE EN ESE
 INTERVALO TOCAN
 UNA SOLA VEZ LAS
 VERTICALES.

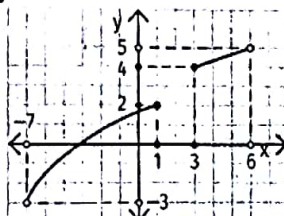
Dominio e imagen

El **dominio** de una función es el intervalo real de los valores de x que intervienen en la función y la **imagen** es el intervalo de los valores de y .



Dominio: $[-8; 5]$
 Imagen: $[-3; 4]$

$f: [-8; 5] \rightarrow [-3; 4]$



Dominio: $(-7; 1] \cup [3; 6)$
 Imagen: $(-3; 2] \cup [4; 5)$

$f: (-7; 1] \cup [3; 6) \rightarrow (-3; 2] \cup [4; 5)$

Cuando una función está definida por una fórmula, su dominio son los valores que pueden cumplir con las operaciones incluidas en la fórmula.

$f(x) = 2x + 1 \rightarrow$ Cualquier número puede ser el valor de x .

$\rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x+3}{x} \rightarrow$ No se puede dividir por cero ($x \neq 0$).

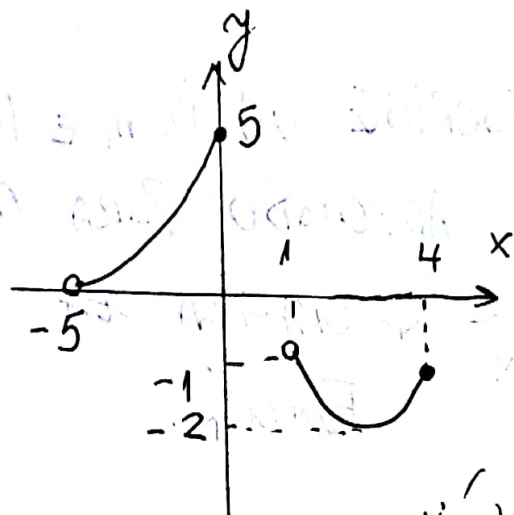
$\rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow$ El valor de x debe ser mayor o igual que cero ($x \geq 0$).

$\rightarrow D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0; +\infty)$

EJEMPLO 3: ESCRIBÍ EL DOMINIO Y LA IMAGEN DE CADA FUNCIÓN.

a)

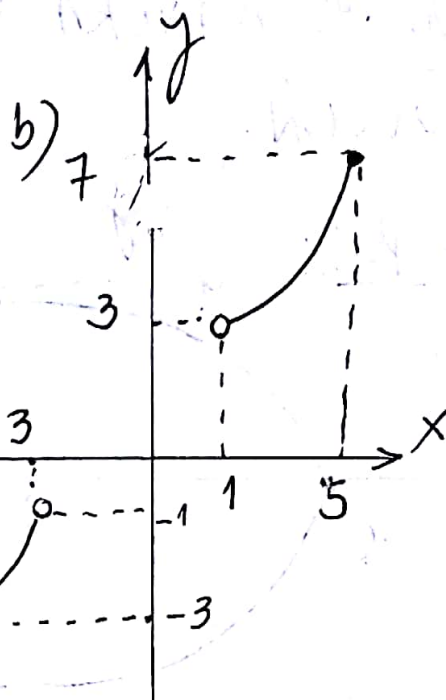


$$\text{Dom } f = (-5, 0] \cup (1, 4]$$

El conjunto del dominio

lo escribimos como intervalos, colocamos paréntesis si no incluye ese número y corchete si lo incluye.

$$\text{Im } f = [-2, -1) \cup (0, 5]$$



$$\text{Dom } f = [-4, 3) \cup (1, 5]$$

$$\text{Im } f = [-3, -1) \cup (3, 7]$$

dominio es el conj. donde interviene x en la función. y imagen es en el eje y donde interviene la función.

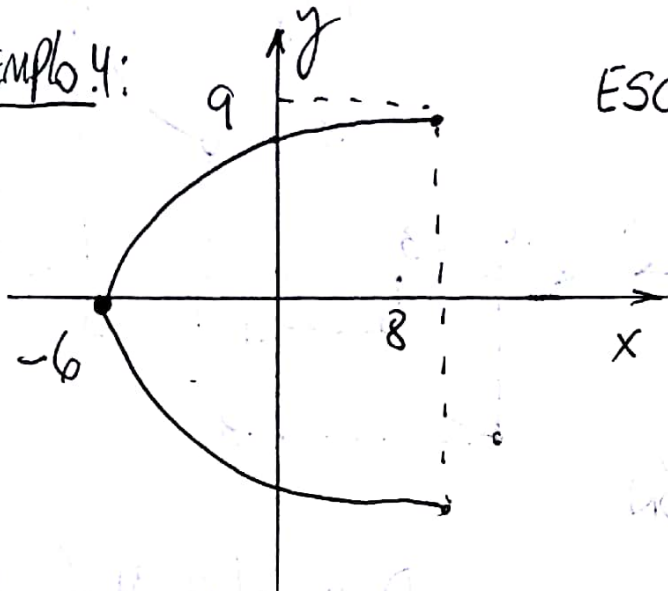
NOTA: • incluye extremo

○ no incluye extremo

4

TAMBIEN PODEMOS RESTRINGIR EL DOMINIO DE TAL MANERA QUE LA GRAFICA SI SEA FUNCION.

Ejemplo 4:



ESCRIBE UN DOM E IM.
ADECUADO PARA QUE
LA GRAFICA SEA
FUNCION.

Solucion:

$$\text{Dom} = [-6; 8] \quad \text{Im} = [0, 9]$$

TAMBIEN NOS PUEDEN DAR LA FORMULA DE LA FUNCION Y NOS PIDAN DOMINIO.

Ejemplo 5: HALLAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES

a) $f(x) = \frac{6+x}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x-16}$

Solución:

a) $f(x) = \frac{6+x}{x}$

Dom. = $\mathbb{R} - \{0\}$

PARA HALLAR EL DOMINIO
NOS FIJAMOS QUE
VALORES ADMITE LA
FUNCIÓN, TODOS LOS
REALES MENOS EL CERO
YA QUE NO PODEMOS
DIVIDIR POR CERO

b) $f(x) = \sqrt{x-16}$

EN ESTE CASO LA RAIZ
NO PUEDE TENER UN
RADICANDO NEGATIVO.
ENTONCES.

$$x - 16 \geq 0$$

$x \geq 16$; LUEGO SON TODOS LOS
REALES MAYORES O IGUALES QUE 16. Y LO
ESCRIBIMOS ASÍ. Dom = $[16, +\infty)$

↑ INFINITO



Crecimiento y decrecimiento

Una función es

- creciente cuando, al aumentar los valores de x , la función aumenta.
- decreciente cuando, al aumentar los valores de x , la función disminuye.
- constante cuando, al aumentar los valores de x , la función no varía.

Los puntos donde la función pasa de ser

- creciente a ser decreciente se denominan máximos relativos.
- decreciente a ser creciente se denominan mínimos relativos.

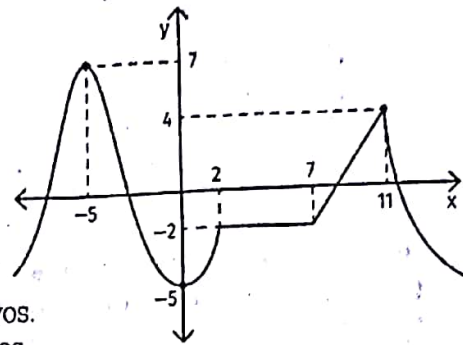
Creciente: $(-\infty; -5) \cup (0; 2) \cup (7; 11)$

Decreciente: $(-5; 0) \cup (11; +\infty)$

Constante: $(2; 7)$

Máximos relativos: $(-5; 7)$ y $(11; 4)$

Mínimo relativo: $(0; -5)$



Función lineal

La fórmula de función **lineal** es: $y = mx + b$ → Ecuación explícita de la recta

La gráfica de una función lineal es una **recta**.

- El valor de m es la pendiente, que es la inclinación de la recta dada por el ángulo $\hat{\alpha}$.

$$\hat{\alpha} = \text{inv tg } \frac{y_1}{x_1} \rightarrow m = \frac{y_1}{x_1}$$

- El valor de b es la ordenada al origen, que es donde la recta corta al **eje y**.
- La raíz es el valor donde la recta corta al **eje x**.

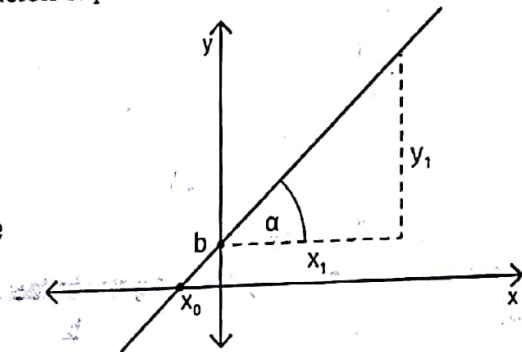
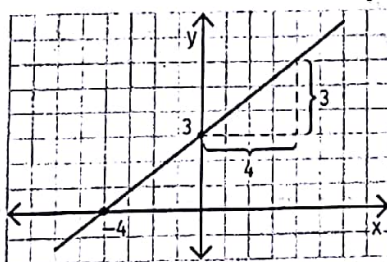


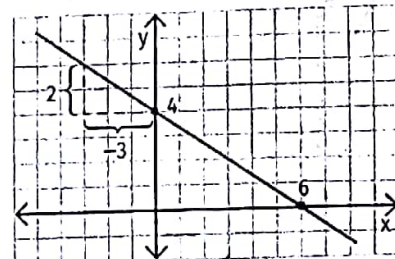
Gráfico de una recta a partir de su fórmula

$$y = \frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow m = \frac{3}{4} \rightarrow \begin{matrix} y_1 \\ x_1 \end{matrix}$$



$$\frac{3}{4}x + 3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x = -3 \Rightarrow x_0 = -4$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow m = -\frac{2}{3} \rightarrow \begin{matrix} y_1 \\ x_1 \end{matrix}$$



$$-\frac{2}{3}x + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = -4 \Rightarrow x_0 = 6$$

EJEMPLO 6: HALLÁ LA ECUACIÓN EXPLÍCITA, LA PENDIENTE, LA ORDENADA AL ORIGEN Y LA RAÍZ DE CADA RECTA.

a) $3x + 2y = 1$

b) $\frac{x + 2y}{5} = 6$

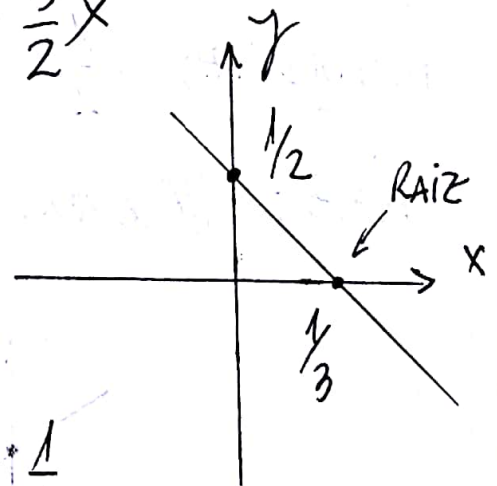
Solución:

ECUACIÓN EXPLÍCITA: DESPEJAMOS "y"

$$2y = 1 - 3x$$

$$y = \frac{1 - 3x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$$



PENDIENTE: $-\frac{3}{2}$ ORDENADA: $\frac{1}{2}$

RAÍZ: HACEMOS $y=0$; $3x + 2 \cdot 0 = 1$
 $\boxed{x_0 = \frac{1}{3}}$

$$b) \frac{x+2y}{5} = 6$$

Ecuación explícita: DESPEJO "y"

$$x+2y = 6 \cdot 5$$

$$2y = 30 - x$$

$$y = \frac{30-x}{2} = 15 - \frac{1}{2}x$$

$$\boxed{y = 15 - \frac{1}{2}x}$$

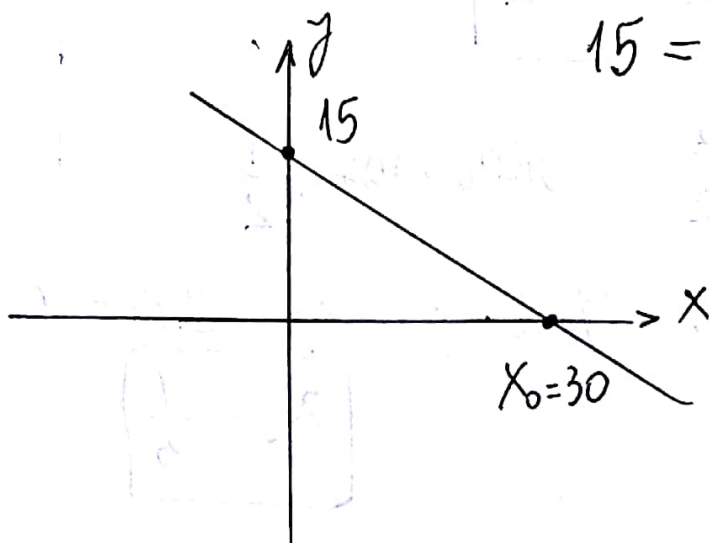
PENDIENTE: $-\frac{1}{2}$

ORDENADA: 15

RAÍZ: HACEMOS $y=0$; $15 - \frac{1}{2}x_0 = 0$

$$15 = \frac{1}{2}x_0 \rightarrow x = 15 \cdot 2$$

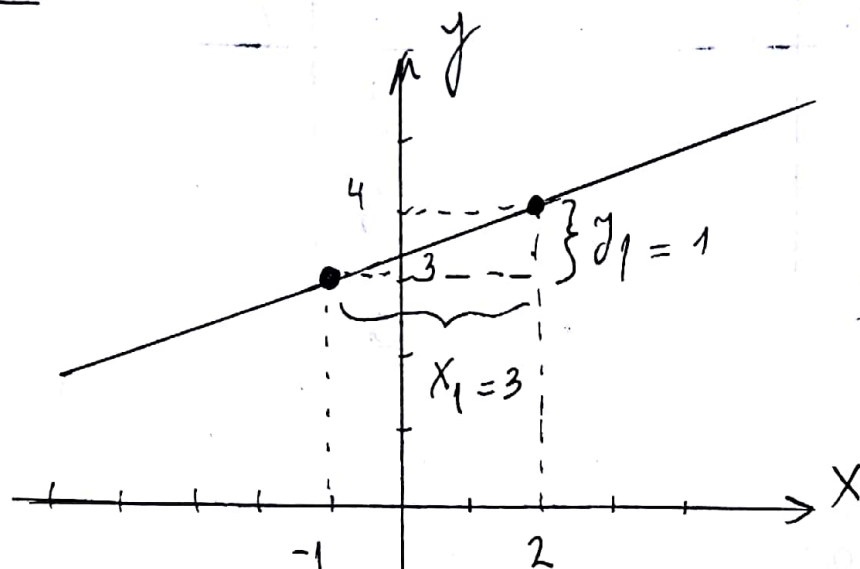
$$\boxed{x_0 = 30}$$



9

EJEMPLO 7: TRAZA LA RECTA QUE PASA POR
LOS PUNTOS $(-1, 3)$ y $(2, 4)$. y HALLA LA
ECUACIÓN DE LA RECTA IMPLÍCITA.

SOLUCIÓN



SE OBSERVA QUE $y_1 = 1$ y $x_1 = 3$

LUEGO $m = \frac{1}{3}$, ENTONCES LA ECUACIÓN

EXPLÍCITA $y = mx + b$ EN ESTE CASO:

$y = \frac{1}{3}x + b$. LUEGO PARA HALLAR "b"

SABEMOS QUE SI $x = 2 \rightarrow y = 4$ REEMPLAZO

$$4 = \frac{1}{3} \cdot 2 + b \rightarrow 4 - \frac{2}{3} = b \rightarrow \boxed{b = \frac{10}{3}}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}}$$

10

EJEMPLO 8: COMPLETA LA TABLA Y GRAFICA' CADA RECTA CON DISTINTOS COLORES.

a) $y = 2x + 1$

x	y
0	
1	
-2	

b) $y = \frac{2}{3}x$

x	y
3	
6	
0	

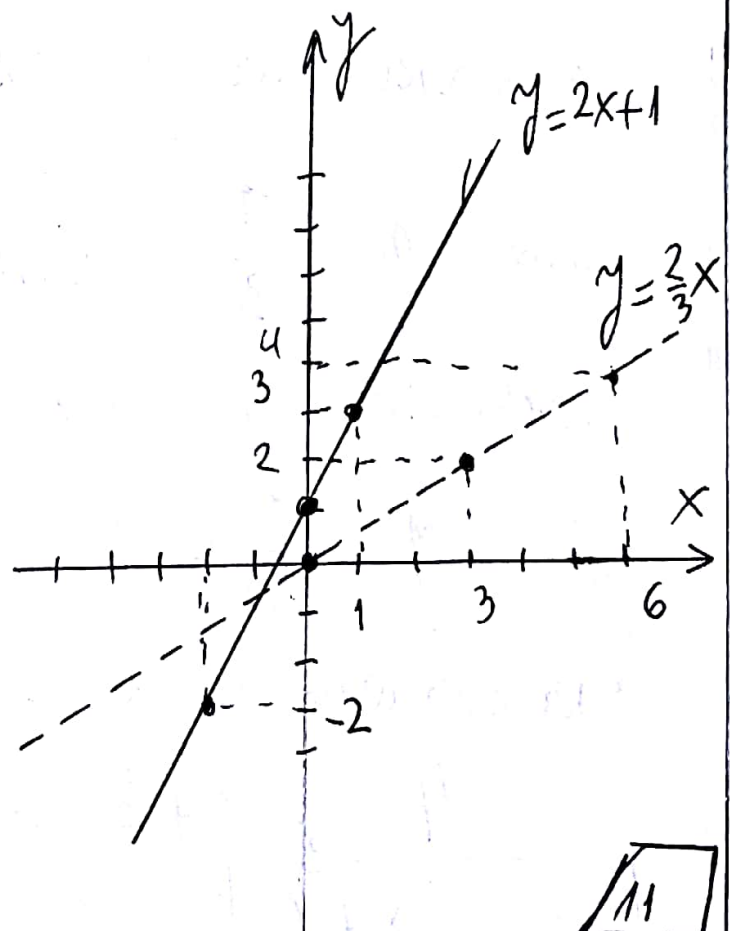
Solucion

a) $y = 2x + 1$

x	y
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
-2	$2 \cdot (-2) + 1 = -3$

b)

x	$y = \frac{2}{3}x$
3	$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$
6	$\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$
0	0



Posiciones de dos rectas en el plano

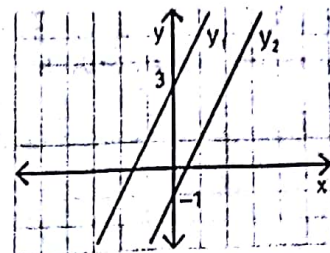
12

Dos rectas en un plano pueden ser **paralelas** ($\parallel$), **perpendiculares** ($\perp$) u **oblicuas** ($\angle$).
Las rectas son

- paralelas, cuando tienen la misma pendiente.

$$\begin{cases} y_1 = m_1 \cdot x + b_1 \\ y_2 = m_2 \cdot x + b_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 \parallel y_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

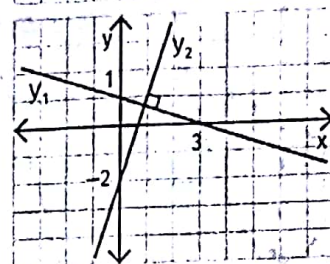
$$\begin{cases} y_1 = 2x + 3 \\ y_2 = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 \parallel y_2$$



- perpendiculares, cuando sus pendientes son números inversos y opuestos.

$$\begin{cases} y_1 = m_1 \cdot x + b_1 \\ y_2 = m_2 \cdot x + b_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 \perp y_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3x - 2 \\ y_2 = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 \perp y_2$$



- oblicuas, cuando sus pendientes no cumplen ninguna de las condiciones anteriores.

EJEMPLO 8: HALLA LA ECUACIÓN EXPLÍCITA DE CADA RECTA Y COLOCÁ $\angle$; $\parallel$ ó $\perp$ SEGÚN CORRESPONDA.

$$\begin{cases} x = \frac{y_1 - 3}{2} \\ y_2 - 2x + 5 = 0 \end{cases} \quad y_1 \square y_2$$

Solución: DESPEJAMOS "y" DE AMBAS

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

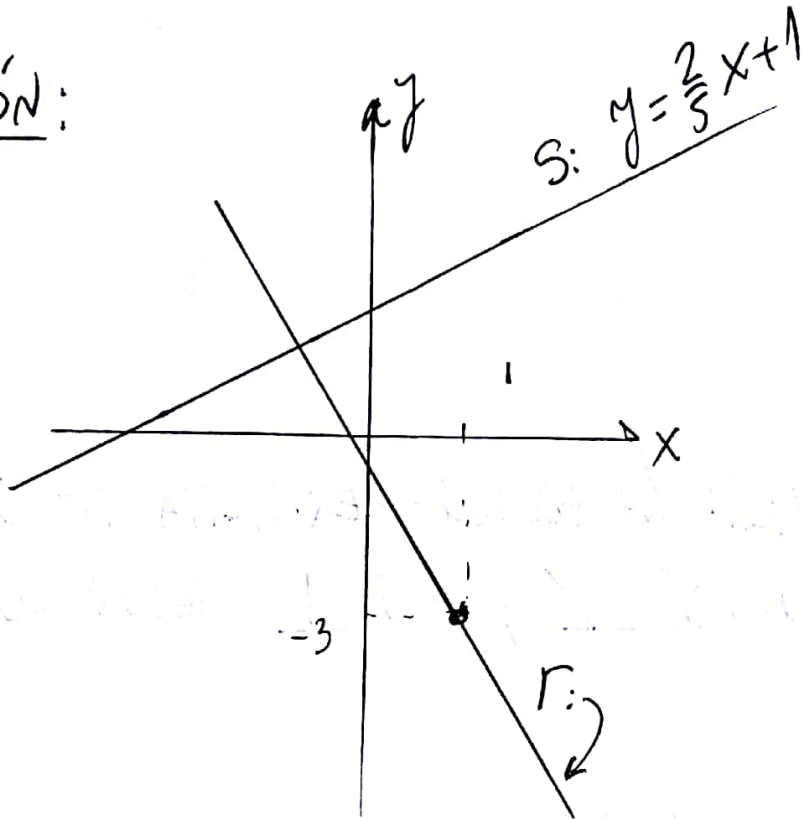
WEGO TIENEN LA MISMA

PENDIENTE $m_1 = m_2$

ENTONCES SON $\parallel$. $y_1 \parallel y_2$

EJEMPLO 9: HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE ES PERPENDICULAR A $y = \frac{2}{5}x + 1$ Y PASA POR $P(1, -3)$.

Solución:



Como

$r \perp S$, ENTONCES r : TIENE PENDIENTE $m = -\frac{5}{2}$

Por lo tanto $y = -\frac{5}{2}x + b$. AHORA SI QUEREMOS ENCONTRAR "b". SABEMOS QUE PARA

$$x=1 \rightarrow y=-3.$$

$$-3 = -\frac{5}{2} \cdot 1 + b \rightarrow -3 + \frac{5}{2} = b$$

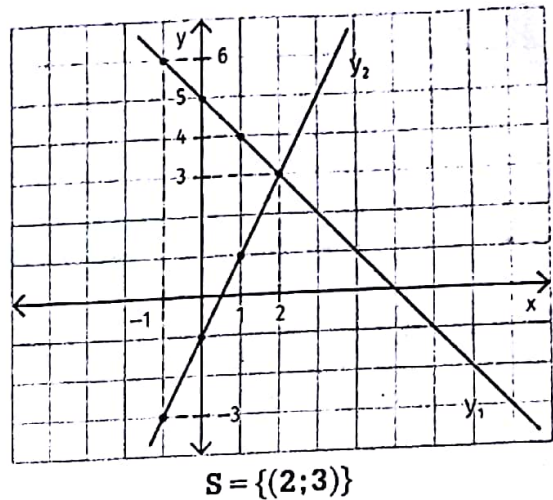
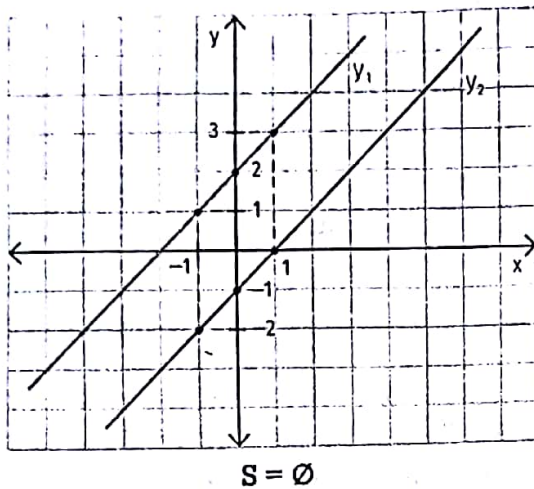
$$-\frac{1}{2} = \frac{-6+5}{2} = b \rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

$$r: \boxed{y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones** lineales son dos rectas.

Resolver un sistema es encontrar el **punto** donde se **cortan** ambas rectas; y si son paralelas, el sistema no tiene solución.

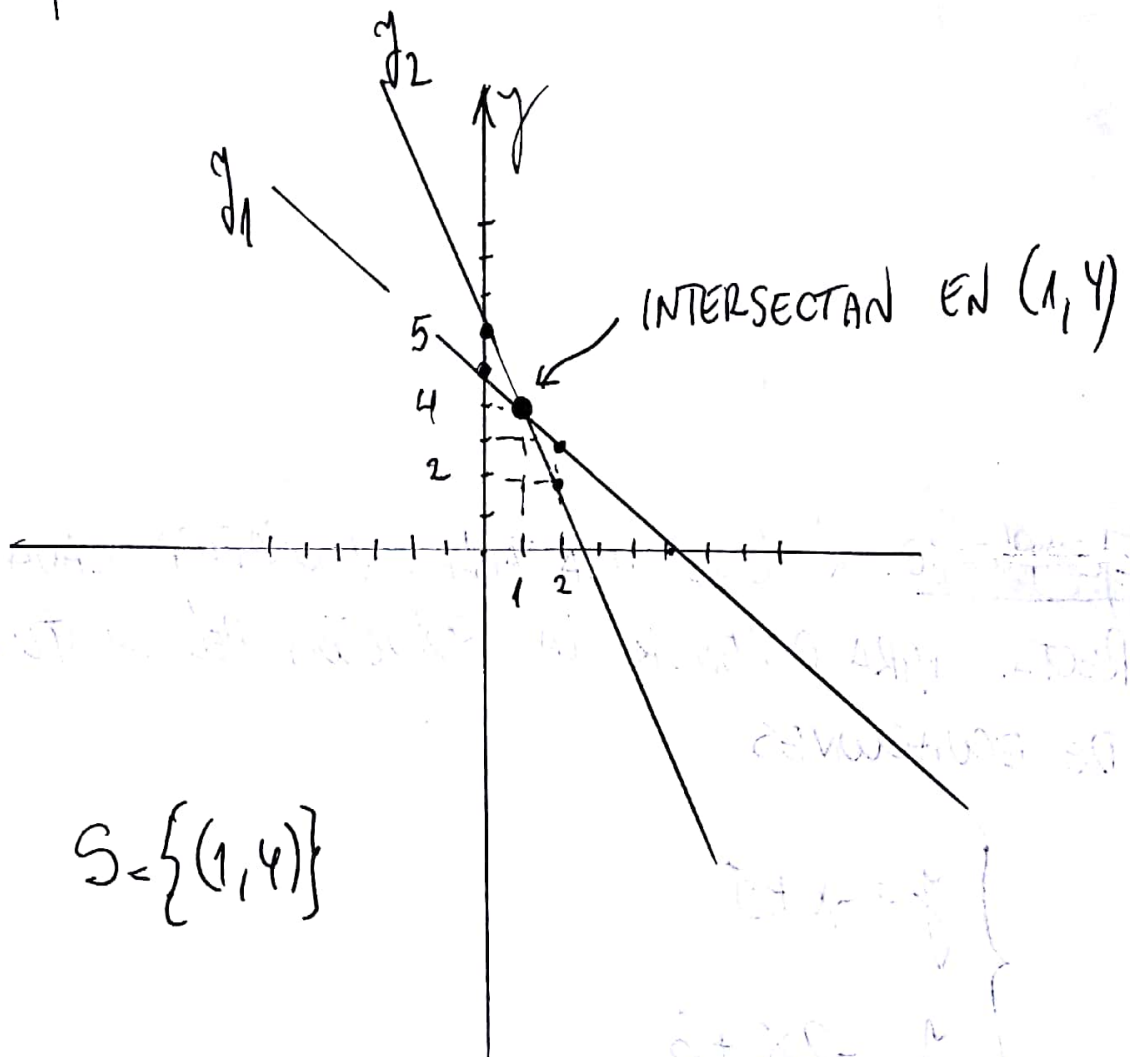


EJEMPLO 10: REALIZA UNA TABLA Y GRAFICA CADA RECTA. PARA OBTENER LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

X	$y_1 = -x + 5$
0	5
1	4
2	3

X	$y_2 = -2x + 6$
0	6
1	4
2	2



$$S = \{(1, 4)\}$$

Resolución analítica de un sistema

Para resolver **analíticamente** un sistema de ecuaciones, existen varios métodos.

■ Método de **igualación**.

- Se despeja la misma incógnita en cada ecuación, se igualan y se resuelve.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \\ x - 2y = 7 \Rightarrow y = \frac{x-7}{2} \end{cases} \rightarrow 4 - 2x = \frac{x-7}{2}$$

$$2(4 - 2x) = x - 7 \Rightarrow 8 - 4x = x - 7 \Rightarrow -5x = -15 \Rightarrow x = 3$$

- Se reemplaza el valor obtenido en alguna de las ecuaciones y se resuelve.

$$y = 4 - 2x \Rightarrow y = 4 - 2 \cdot 3 \Rightarrow y = -2$$

■ Método de **sustitución**.

- Se despeja una de las incógnitas en una ecuación, se reemplaza en la otra y se resuelve.

$$\begin{cases} x - y = 9 \Rightarrow x = y + 9 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \rightarrow 4(y + 9) + 3y = 8 \Rightarrow 4y + 36 + 3y = 8 \Rightarrow 7y = -28 \Rightarrow y = -4$$

- Se reemplaza el valor obtenido en alguna de las ecuaciones y se resuelve.

$$x = y + 9 \Rightarrow x = -4 + 9 \Rightarrow x = 5$$

■ Método de **reducción por sumas y restas**.

- Se igualan los valores absolutos de los coeficientes de una de las incógnitas en las dos ecuaciones y, luego, se suman o restan según corresponda.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4(x + y) = 4 \cdot 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 4x + 4y = 8 \\ -4x + 3y = 1 \\ \hline 0x + y = 7 \end{array} \Rightarrow y = 7$$

- Se reemplaza el valor obtenido en alguna de las ecuaciones y se resuelve.

$$x + y = 2 \Rightarrow x + 7 = 2 \Rightarrow x = -5$$

EJEMPLO 11: RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO MÁS CONVENIENTE.

$$\begin{cases} x + 2y = 13 & (1) \\ y - x = 2 & (2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Podemos usar el método de sustitución

1º) DESPEJO y DE LA SEGUNDA ECUACIÓN.

$$y = 2 + x$$

2º) LA SUSTITUYO EN LA ② ECUACIÓN. Y RESOLVEMOS.

$$x + 2 \cdot (2 + x) = 13$$

$$x + 4 + 2x = 13$$

$$3x = 13 - 4$$

$$x = 9 : 3$$

$$\boxed{x = 3}$$

3º) AVERIGUAMOS LA OTRA INCÓGNITA.

$$y = 2 + x = 2 + 3 = 5$$

↑
3

$$\boxed{y = 5}$$

VERIFICAMOS

$$\begin{cases} 3 + 2 \cdot 5 = 13 \\ 5 - 3 = 2 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\text{Sol} = \{(3, 5)\}$$

PROBLEMA: EN UNA GRANJA HAY CERDOS Y GALLINAS
SI SE CONTARON 130 CABEZAS Y 360 PATAS.
¿CUÁNTOS CERDOS Y GALLINAS HAY?

SOLUCIÓN:

LLAMAREMOS x : CERDOS (CANTIDAD)

y : GALLINAS (CANTIDAD)

PLANTEAMOS :

$$\begin{cases} x + y = 130 & (1) \\ 4x + 2y = 360 & (2) \end{cases}$$

RESOLVEMOS POR SUSTITUCIÓN

DE (1) DESPEJO " y " $\rightarrow y = 130 - x$

REEMPLAZO EN LA (2) $4x + 2 \cdot (130 - x) = 360$

$$4x + 260 - 2x = 360$$

$$2x = 360 - 260$$

$$\boxed{x = 50}$$

$$y = 130 - 50$$
$$\boxed{y = 80}$$

Rta:

CERDOS: 50

GALLINAS: 80

18