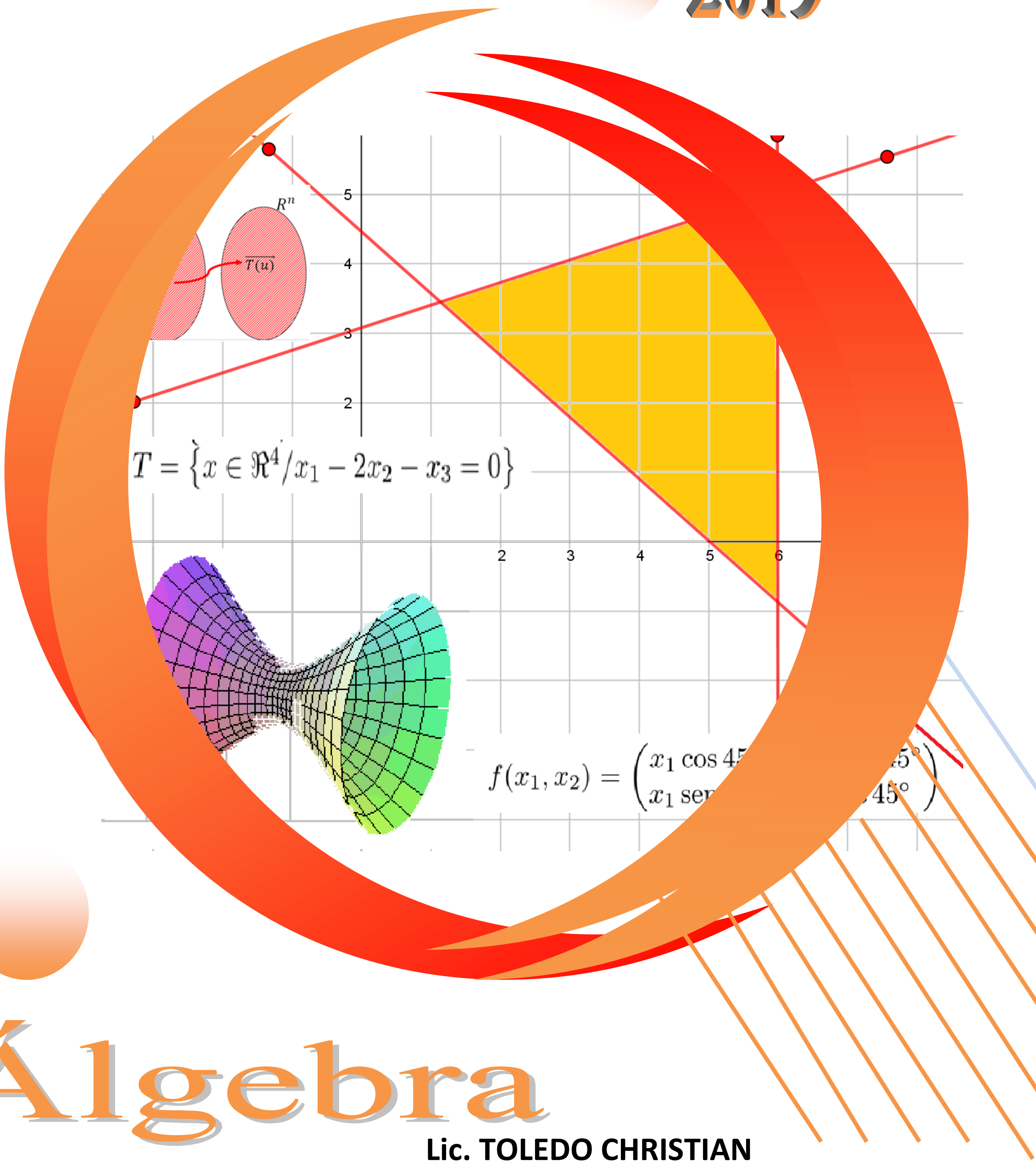
Guias de Problemas

Profesorado de Matemática

2019



Álgebra

Lic. TOLEDO CHRISTIAN

Álgebra

Profesorado de Matemática
Departamento de matemática - ISFDyT N$^\circ$44

2018

Índice general

Guia 1:Revisión

Actividad 1 Resolver e interpretar

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 3x-2y-z &= 4 \\ -2x+y+2z &= 2 \end{cases}$$

Sol.: (1,-2,3)

Actividad 2 Resolver e interpretar

$$\begin{cases} 3x-4y+2z &= 1 \\ -2x-3y+z &= 2 \\ 5x-y+z &= 5 \end{cases}$$

Sol.: incompatible

Actividad 3 Resolver

$$\begin{cases} x+y+w &= 6 \\ x+z-w &= -3 \\ y+z+w &= 4 \\ x-y+z &= -2 \end{cases}$$

Sol.: (1,2,-1,3)

Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones:

Actividad 4 Resolver e interpretar

$$\begin{cases} x-y+3z &= -4 \\ x+y+z &= 2 \\ x+2y-z &= 6 \end{cases}$$

Sol.: (1,2,-1)
‘

Actividad 5 Resolver e interpretar

$$\begin{cases} x+y-z+4w &= -3 \\ 2x-y+4z-5w &= 13 \\ -x+y-4z-w &= -6 \\ 3x+4y+z+w &= 12 \end{cases}$$

Sol.: (1,2,2,-1)

Actividad 6 Resolver

$$\begin{cases} x+y+w &= 6 \\ x+z-w &= -1 \\ y+z+w &= 6 \\ x-y+z &= 0 \end{cases}$$

Sol.: (1,2,1,3)

Actividad 7 Resolver e interpretar

$$\begin{cases} 3x+4y-z &= 3 \\ 6x-6y+2z &= -16 \\ x-y+2z &= -6 \end{cases}$$

Sol.: (-1,1,-2)

Actividad 8 Resolver e interpretar

$$\begin{cases} x-y+z+w &= 0 \\ x+y-z+w &= 0 \\ x-y-z-w &= 2 \\ x+y+z+w &= 0 \end{cases}$$

Sol.: (1,0,0,-1)

Actividad 9 Resolver

$$\begin{cases} x-2y+z-3w &= 0 \\ x-3y+z+2w &= -2 \\ 5x-3y+2z+2w &= 5 \\ 3x-2y-4z &= -13 \end{cases}$$

Sol.: (1,2,3,0)

Determinantes

Actividad 10 Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 45 & 10 & 45 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol.: 17 **Sol.: -40** **Sol.: 0**

Actividad 11 Calcula el valor de los determinantes propuestos en los siguientes ejercicios desarrollando por varias líneas y por la regla de Sarrus y comprueba que da lo mismo.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 14 \\ -1 & 7 & 12 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sol.: 5 **Sol.: 0** **Sol.: 0**

Actividad 12 Calcular los Determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol.: -295

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol.: 12

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sol.: $(x+1)^4$

Resolver por Cramer los sistemas de ecuaciones propuestos en los siguientes ejercicios:

Actividad 13

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ -2x+3y-z &= 4 \\ x-y+2z &= 3 \end{cases}$$

Sol.: (-2,1,3)

Actividad 14

$$\begin{cases} 2x+3y-z &= 4 \\ 4x-y+z &= 2 \\ x+2y-z &= 3 \end{cases}$$

Sol.: (1 , 0 , -2)

Actividad 15

$$\begin{cases} x-5y+3z &= -14 \\ 3x-y &= 11 \\ x+z &= 3 \end{cases}$$

Sol.: $\left(\frac{78}{17}, \frac{47}{17}, -\frac{27}{17}\right)$

Sistemas de ecuaciones homogéneos

Resolver los sistemas de ecuaciones homogéneos planteados en los siguientes ejercicios:

Actividad 16

$$\begin{cases} 3x-5y+z &= 0 \\ x+y+3z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

Sol.: (0,0,0)

Actividad 17

$$\begin{cases} x-y-z &= 0 \\ x+y+3z &= 0 \\ x-5y-9z &= 0 \end{cases}$$

Sol.: $(-\lambda, -2\lambda, \lambda)$

Actividad 18

$$\begin{cases} 5x+3y-4z &= 0 \\ 2x+5y+z &= 0 \\ 3x+2y+3z &= 0 \end{cases}$$

Sol.: (0,0,0)

Actividad 19

$$\begin{cases} -x+11y-4z &= 0 \\ -2x+4y+z &= 0 \\ x+y-2z &= 0 \end{cases}$$

Sol.: $\left(\lambda, \frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}\right)$

Actividad 20

$$\begin{cases} 3x+6y+3z &= 0 \\ 5x+10y+5z &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \end{cases}$$

Sol.: $(-\lambda, \mu, -\lambda-2\mu)$

Actividad 21

$$\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ 3x+2y+5z &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \end{cases}$$

Sol.: (0,0,0)

Actividad 22 Cuando el butano, C_4H_10, se quema en presencia de oxígeno para formar bióxido de carbono y agua, se produce la reacción $C_4H_10+O_2 \rightarrow CO_2+H_2O$. Balancear la ecuación química.

Actividad 23 La combustión de amoníaco (NH_3) en exígeno (O_2) produce nitrógeno (N_2) y agua (H_2O).

$$w(NH_3) + x(O_2) \to y(N_2) + z(H_2O)$$

Determinar los valores enteros más pequeños para las variables w, x, y, z de manera tal que la ecuación química balanceada.

Actividad 24 Balancear

$$Fe + Cl_2 \rightleftharpoons FeCl_3$$

Actividad 25 Balancear

$$KMnO_4 + HCl = KCl + MnCl_2 + H_2O + Cl_2$$

Actividad 26 Balancear

$$K_4Fe(CN)_6 + H_2SO_4 + H_2O \rightleftharpoons K_2SO_4 + FeSO_4 + (NH_4)_2SO_4 + CO$$

Actividad 27 Balancear

$$C_6H_5COOH + O_2 \rightleftharpoons CO_2 + H_2O$$

Actividad 28 Balancear

$$K_4Fe(CN)_6+KMnO_4+H_2SO_4 \rightleftharpoons KHSO_4+Fe_2(SO_4)_3+MnSO_4+HNO_3+CO_2+H_2O$$

Actividad 29 Se da el siguiente sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas en el que el número a se supone conocido:

$$\begin{cases} ax + 2y & = & 2 \\ 2x + ay & = & a \\ x - y & = & -1 \end{cases}$$

a) Determinar para que valores de a es determinado y para cuáles indeterminado.

b) Hallar tres soluciones.

Sol.: $a \in \Re - \{3, -2\}$..

Guia 2:Programación lineal

Actividad 1 Representa en el plano las siguientes inecuaciones:

a) $x > -2$
b) $y \leq 3$
c) $x + 5y > 10$
d) $x + 2y \leq 16$
e) $2x + y \leq 20$

Actividad 2 Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} y - x & \leq & 2 \\ x + 5y & \leq & 10 \\ x + 2y & \leq & 16 \\ 2x + y & \leq & 20 \end{cases}$$

Actividad 3 Representa la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 3 \quad , \quad x + y \leq 10 \quad , \quad 2y \geq 3x.$$

Averigua en qué puntos se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 4x + 3y$.

Actividad 4 Representa el recinto definido por estas inecuaciones:

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad x \leq 10 \quad , \quad x \leq y \quad , \quad y - 2x \leq 6 \quad , \quad 3x + 4y \geq 35$$

¿En qué punto la función $F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo?

Actividad 5 Un fabricante produce bicicletas y motos las cuales se producen a través de dos centrales de producción mecánica. La central 1 tiene un máximo de 120 horas disponibles y la central 2 Un máximo de 180 horas. La manufactura de una bicicleta en la central 1 requiere de 6 hs y la central 2 de 3 hs. La fabricación de una moto requiere 4 hs en la central 1 y 10 hs en la central 2. Si la ganancia por bici es de $450 y por cada moto $5500. Determinar el número de bicis y motos que deben fabricar para obtener la máxima ganancia.

	Máx 120	Máx 180
	Central 1	**Central 2**
Bici	6hs	3hs
Moto	4hs	10hs

Actividad 6 Una repostera se dedica a la elaboración de tortas y masas obteniendo un beneficio de \$ 16 por cada Kilo de masas. Y \$ 24 por cada torta. Por circunstancias especiales de esta semana dispone de 40 Kg de harina y 25 kg de azúcar. Si para la elaboración de cada torta necesita 300gr de harina y 200 gr De azúcar y para cada / kg de masa 400gr y 200gr en el mismo orden. ¿ Que cantidad de cada uno le conviene elaborar para obtener la máxima ganancia?.

Actividad 7 Un nutricionista le prescribe a un paciente una ingesta en un cierto periodo de tiempo de al Menos 40 mg de vit $B1$ y30 mg de vit $B2$. Existen dos compuestos diferentes A y B. Cada píldora de A contiene 1 mg de $B1$ y 1 mg $B2$ costando \$1,20 c/u. En cambio el compuesto B Contiene 2 mg $B1$ y 1mg de $B2$ y tiene un valor de \$1,50 c/u. Deseamos hallar la combinación De píldoras que debe adquirir el paciente para satisfacer sus requerimientos vitamínicos al menor costo.

Actividad 8 Una empresa debe producir por semana dos artículos diferentes, a lo sumo 250 unidades. Sabiendo que del primer articulo por lo menos deben producirse 80 unidades y el doble del segundo. Calcular al mayor ingreso que se puede obtener sabiendo que la ganancia generada por cada uno Es de \$50 y \$65 respectivamente. Rta: \$ 13 335

Actividad 9 Indicar una posible función objetivo para que:

a) La función se encuentra en uno de los vértices.
b) Existan soluciones sobre algunos de los lados del polígono.
c) Si las condiciones a las cuáles están dadas, sujeta a la función objetivo son:

$$\begin{cases} 4x + y & \geq & 16 \\ x + 2y & \leq & 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 & & \end{cases}$$

Actividad 10 El alimento para un animal ha de ser una mezcla de dos productos alimenticios, cada unidad de los cuales contiene proteína, grasas, y carbohidratos en el número de gramos que se da en el siguiente Cuadro:

productos alimenticios	**I**	**II**
Proteínas	10	5
Grasas	0,1	0,9
Carbohidratos	10	30

Cada bolsa de la mezcla resultante tiene que contener cuando menos 40 gr de proteínas, 1,8 gr de gramos de grasa, 120 gr de carbohidratos. Sabemos que el producto I cuesta \$ 6 los 100 gramos y el producto II cuesta \$ 10 los 100 gramos. Minimiza el Costo.

Actividad 11 Minimiza la función $f(x,y)=2x+8y$ sometido a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x+4y & \geq & 8 \\ 2x-5y & \geq & 0 \\ -x+5y & \leq & 5 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$

Actividad 12 Un herrero cuenta con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña Que quiere vender, respectivamente a \$1000 y \$ 1800 cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1kg de acero y 3 kg de aluminio y para la de montaña 2 kg de ambos Metales. ¿Cuántas bicicletas de cada una vendería?.

Actividad 13 Una empresa de Autobuses Bariloche-Mendoza ofrece plazas para fumadores al precio de \$ 600 y a no fumadores \$400. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el Autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de 3000 kg. ¿Cuál ha de ser la oferta de plaza de la Empresa para cada tipo de pasajero, con la finalidad de optimizar el beneficio?

Actividad 14 Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos:
TIPO A, con 3 refrescos con cafeína y 3 sin cafeína. TIPO B, con 2 refrescos con cafeína y 4 sin cafeína. El vendedor gana 60 \$ por cada paquete que vende de tipo A y 50 \$ por cada paquete de tipo B. Calcula de forma razonada cuántos paquetes ha de vender de cada tipo para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

Actividad 15 Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 5000 \$. Le ofrecen dos tipos de naranjas, la de jugo (A) y las ombligo (B): las de tipo A 5 \$ el kilo y las de tipo B a 8 \$ el kilo.Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 58 \$ y el de tipo B a 9 \$. ¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

Actividad 16 El Salón de belleza *bonitas* cuenta con tres sucursales A , B y C y realizan trabajos de cortes-tinturas de cabellos y depilaciones. Debido a la distribución de sus empleados especializados y disponibilidad de los mismos , la sucursal A tiene un máximo de 100 hs, la B un máximo de 80 hs y la C 80 hs.

- Un trabajo de *depilación* en la sucursal A requiere 1hs, en la B 40 minutos, miéntras que en la C 1hs 20 min.
- Un trabajo de *corte y tintura* requiere 2 hs en A, 1hs 40 minutos en B y 40 minutos en C.

Si un trabajo de depilación cuesta \$250 y corte - tintura \$300. Determinar el número de depilaciones, tinturas y cortes de cabellos que se deberán realizar para obtener la **máxima ganancia**.

Actividad 17 En una panadería se hacen para los días festivos dos tipos de tortas: Selva negra y frutilla. Una torta selva negra lleva un cuarto de relleno por cada kg de biscocho y tiene un beneficio de 250 \$, mientras que una de frutillas necesita medio Kg. de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce 400 \$ de beneficio. En la panadería se pueden hacer diariamente hasta 150 Kg. de bizcocho y 50 Kg. de relleno, aunque por problemas de maquinaria no pueden hacer mas de 125 tortas de cada tipo. ¿Cuántas tortas selva negra y cuantas de frutillas deben vender al día para que sea máximo el beneficio?

Actividad 18 Una fábrica de muebles fabrica dos tipos de sillones, S_1 y S_2. La fábrica cuenta con dos secciones; carpintería y tapiceía. Hacer un sillón de tipo S_1 requiere 1 hora de carpintería y 2 de tapicería, mientras que uno de tipo S_2 requiere 3 horas de carpintería y 1 de tapicería. El personal de tapicería trabaja un total de 80 horas, y el de carpintería 90. Las ganancias por las ventas de S_1 y S_2 (unidad) son, respectivamente 600 y 300 \$. ¿Cuántos sillones de cada tipo hay que hacer para maximizar las ganancias?.

Guia 3:Espacios vectoriales

Actividad 1 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios.

a) $W = \{(x_1, x_2) \in \Re^2 / 2x_1 - 5x_2 = 0\}$

b) $W = \{(x_1, x_2) \in \Re^2 / x_1^2 < -1\}$

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 / x_1 - x_2 = x_3 + x_2\}$

d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 / x_1^2 - x_3^2 = 0\}$

e) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Re^5 / x_1 - 3x_3 + x_5 = 2x_2 + x_4 - x_5 = 0\}$

f) $W = \left\{ X \in \Re^5 / \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \right\}$

Actividad 2 Describir geométricamente el subespacio S de $\Re^3$ y decidir si el vector $W \in S$.

a) $\langle (1, 2, 3) \rangle \qquad w = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$

b) $S = \left\langle (1, 2, 3); \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) \right\rangle \qquad w = (-5, -10, 15)$

c) $S = \langle (1, -1, 2); (2, 1, 3) \rangle \qquad w = (3, 0, 6)$

Actividad 3 Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

a) $V = \Re^3 \qquad \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$

b) $V = \Re^4 \qquad \{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, -2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$

c) $V = \Re^3 \qquad \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (4, 6, 8)\}$

Actividad 4 Considere el espacio vectorial $(V; +; \Re; \cdot)$ correspondiente a cada caso para determinar el o los valores de k para cuales los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

a) $A_1 = \{(2, k); (k, -1)\}$

b) $A_2 = \{(2, k, 2); (k, -1, 2); (1, 1, 1)\}$

c) $A_3 = \{(0, 1, 3); (-1, 1, k); (k - 3, 2, 1)\}$

d) $A_4 = \{(1, -1, 2); (k, k - 1, k + 6); (k - 1, k, 1)\}$

Actividad 5 Hallar base y dimensión de los siguientes subespacios.

a) $S = \{(x_1, x_2)\Re^2 / 2x_1 - 5x_2 = 0\}$

b) $S = \{(x_1, x_2, x_3)\Re^3 / 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

c) $S = \{x \in \Re^3 / 2x_1 - x_2 + x_4 = x_2 + 4x_3 + 2x_4\}$

d) $S = \{x \in \Re^4 / x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 2x_2 + x_3\}$

Actividad 6 Decir si el conjunto B es una base para el subespacio de soluciones del sistema.

a) $B = \{(1, 2)\}$ $\quad S : 2x_1 - x_2 = 0$
b) $B = \{(1, 1)\}$ $\quad S : 2x_1 - x_2 = 0$
c) $B = \{(1, 3, 1)\}$ $\quad S : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$
d) $B = \{(1, 2, 1); (1, 1, 0)\}$ $\quad S : x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Actividad 7 Sean en $\Re^3$ las bases

$$B = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$$
$$B' = \{(1, 0, 1); (1, 0, 0); (0, 0, 1)\}$$
$$B'' = \{(-1, 1, 0); (4, -2, 1); (0, 0, 3)\}$$

Halla las coordenadas con respecto a las basesB, B', B'' de:

a) $(2, 3, -1)$
b) $(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3$

Actividad 8 Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ en base
$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

Actividad 9 Hallar base y dimensión de $S \cap T$ y $S + T$.

a) $S = \{x \in \Re^4 / x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$
$T = \{x \in \Re^4 / x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $S = \{x \in \Re^3 / x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$
$T = \{(0, -3, 0), (1, 1, 1)\}$

Actividad 10 Decir cuáles de los siguientes conjuntos son ortogonales.

a) $C = \{(1, 1), (1, -1)\}$
b) $C = \{(1, 0), (0, -1), (1, -1)\}$
c) $C = \{(1, 0, 3), (-3, 0, 1)\}$

d) $C = \{(2,-1,0),(0,0,4),(1,2,0)\}$

Actividad 11 Encontrar todos los vectores ortogonales a todos los vectores del conjunto

$$\{(1,-1,2),(0,1,1)\}$$

. Comprobar que $B = \{(2,-1,0),(1,2,3),(3,6,-5)\}$ es una base ortogonal de $\Re^3$ y calcular las coordenadas del vector $(5,-1,2)$ en base B.

Actividad 12 Sea $B = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,1,1)\}$ una base de $(\Re^3, \langle,\rangle)$ (producto interior canónico). Aplicar el proceso de *Gram - Schmidt* para determinar una base ortonormal.

Actividad 13 Sea $\langle,\rangle$: producto interior canónico.
En cada caso, aplicando el proceso de *Gram-Schmidt*, determinar una base ortonormal.

a) $B = \{(1,1),(0,1)\}$ en $(\Re^2, \langle,\rangle)$

b) $B = \{(1,2,1),(1,0,1),(0,0,1)\}$ en $(\Re^3, \langle,\rangle)$

c) $B = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$ en $(\Re^4, \langle,\rangle)$

Guia 4:Transformaciones Lineales

Actividad 1 Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales.

a) $f_1 : \Re^3 \to \Re^2 / f_1(x, y, z) = (x - 2y, y + z)$

b) $f_2 : \Re^2 \to \Re^3 / f_2(x, y) = (x + y, y + 1, 2y - x)$

c) $f_3 : \Re^2 \to \Re^3 / f_3(x, y) = (x + y, y, 2y - x)$

d) $f_4 : \Re^3 \to \Re^3 / f_4(x, y, z) = \big(x - \frac{y}{2}, 2z + y, x + 3y\big)$

e) $f_5 : \Re^3 \to \Re^4 / f_5(x, y, z) = (x + y, 2z + y, x + 3y)$

f) $f_6 : \Re^3 \to P_2 / f_6(a, b, c) = (a + b)x^2 + |b - c|x + (3c + a)$

g) $f_7 : \Re^3 \to \Re^3 / f(x, y, z) = (3x, 2z, -x)$.

Actividad 2 Interpreta geométricamente las transformaciones lineales $f : \Re^2 \to \Re^2$.

a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

b) $f(x_1, x_2) = (0, x_2)$

c) $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$

d) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 3 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

e) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos 45° & -x_2 \operatorname{sen} 45° \\ x_1 \operatorname{sen} 45° & x_2 \cos 45° \end{pmatrix}$

f) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

g) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

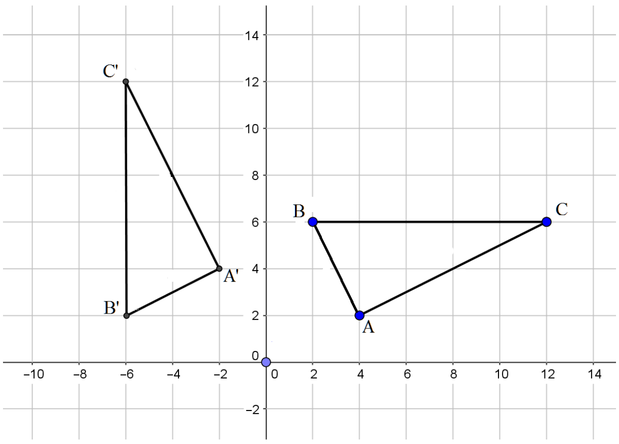
i) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}$

j) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

k) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$

l) $f(x_1, x_2) = (-x_2, -x_1)$

Actividad 3 El siguiente gráfico muestra una transformación $T : \Re^2 \to \Re^2$ / $T(ABC) \to T(A'B'C')$. Deduce la matriz de transformación que se ajuste al movimiento.



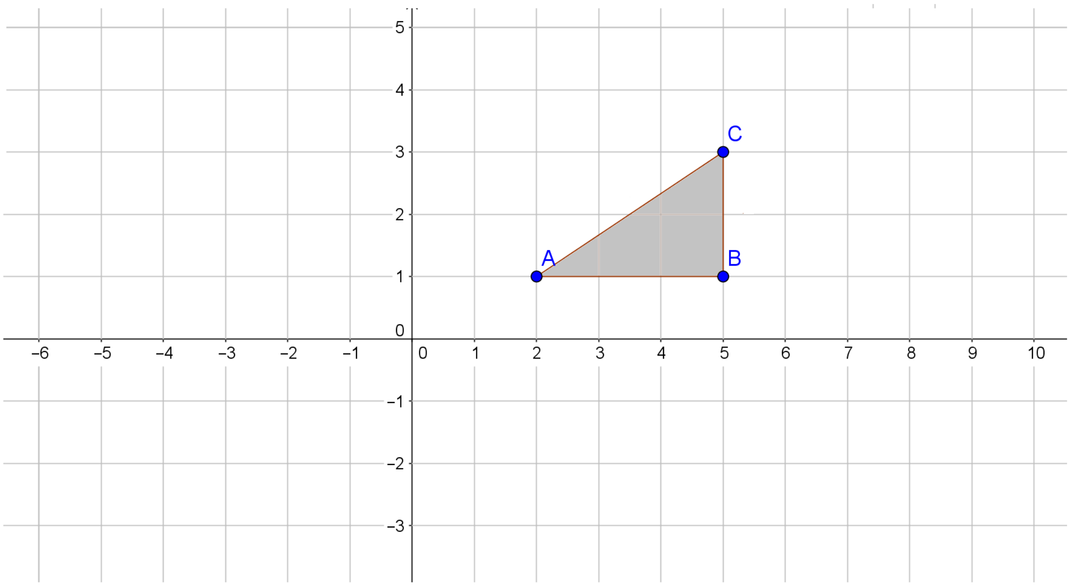
Actividad 4 Dado las siguientes figuras realiza los movimientos que se indican en forma analítica y Grafica. Luego halla la matriz de composición.

a) Una rotación de $90°$ con centro en $(0, 0)$ seguida de un deslizamiento cortante en dirección al Eje y con un factor $k = 3$.

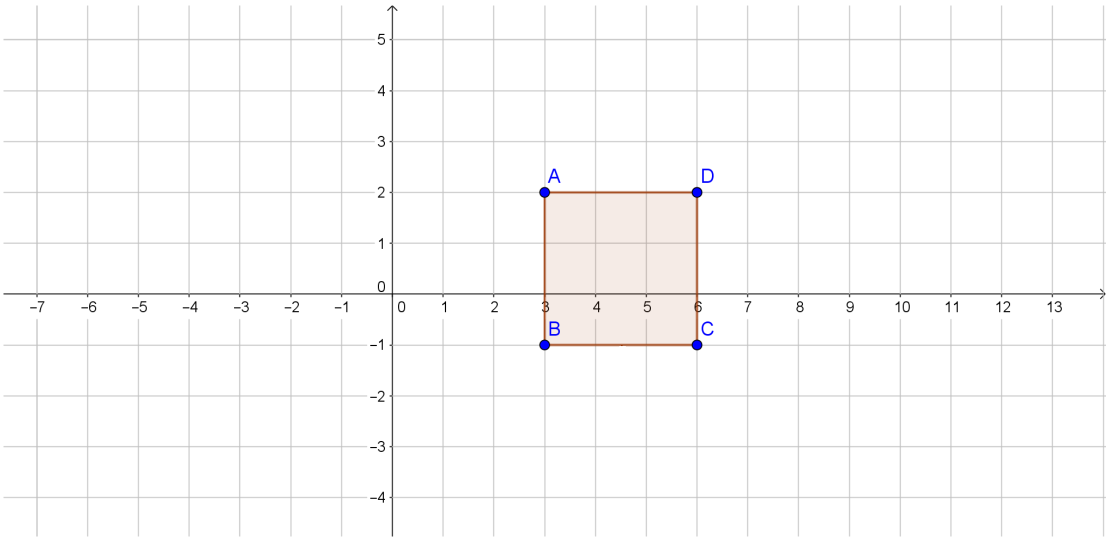
b) Un deslizamiento a lo largo de uno de los ejes de coordenadas con un factor $k = 2$, seguida de una simetría axial respecto al eje x.

c) Rotación $270°$ con centro en el origen, seguido de una simetría central respecto al origen de coordenadas , seguido de una expansión a lo largo de los ejes de coordenadas con un Factor $k = \frac{3}{2}$.

Triángulo ABC



Cuadrado $ABCD$



Actividad 5 Traza un esquema de la imagen del rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, 2)$, bajo:

a) Una reflexión respecto al eje x.

b) Una reflexión respecto al eje y.

c) Una compresión de factor $k = \frac{1}{4}$ en dirección x.

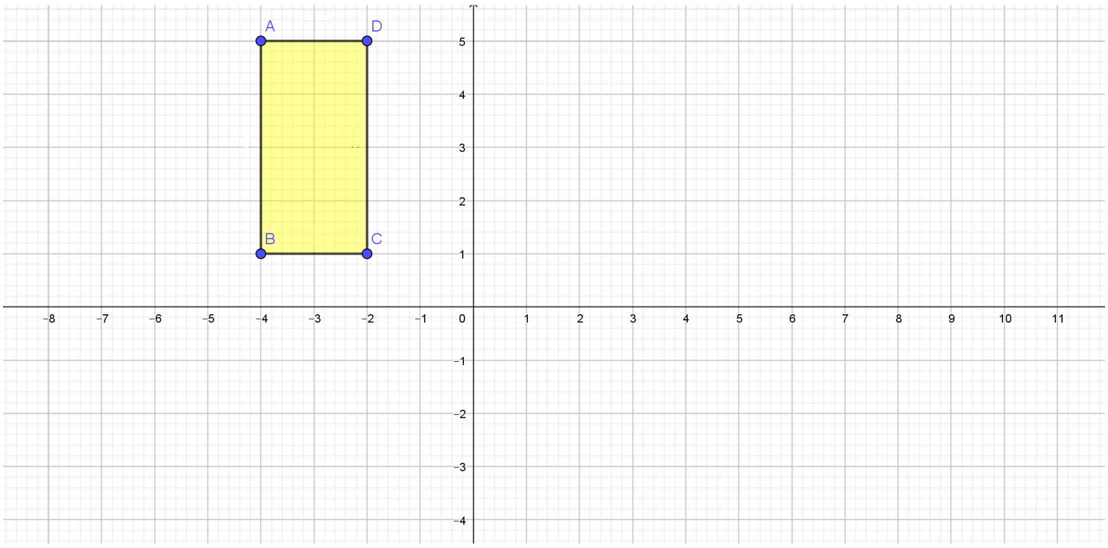
d) Una expansión de factor $k = 2$ en dirección x.

e) Un deslizamiento cortante de factor $k = 3$ en dirección a x.

f) Un deslizamiento cortante de factor $k = -2$ en dirección a y.

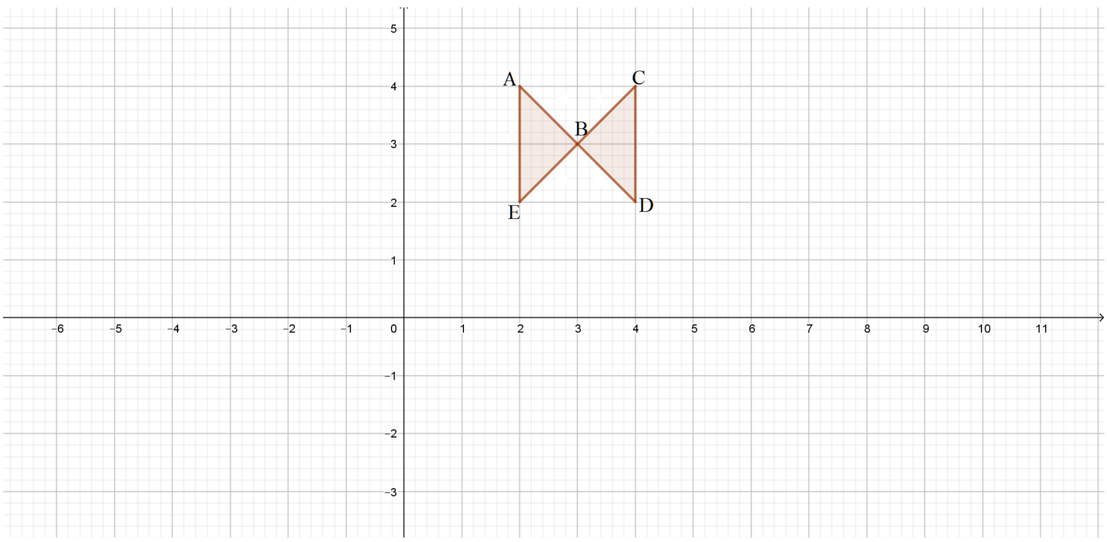
Actividad 6 Dado la figura $ABCD$ realiza los movimientos que se indican en forma analítica y Grafica.

Una compresión a lo largo del eje y con una $k = \frac{1}{2}$, una rotación de $90°$ con centro en $(0, 0)$,seguida de una simetría axial respecto de la recta $y = x$.



Actividad 7 Dado la figura $ABCDE$ realiza los movimientos que se indican en forma analítica y Grafica.

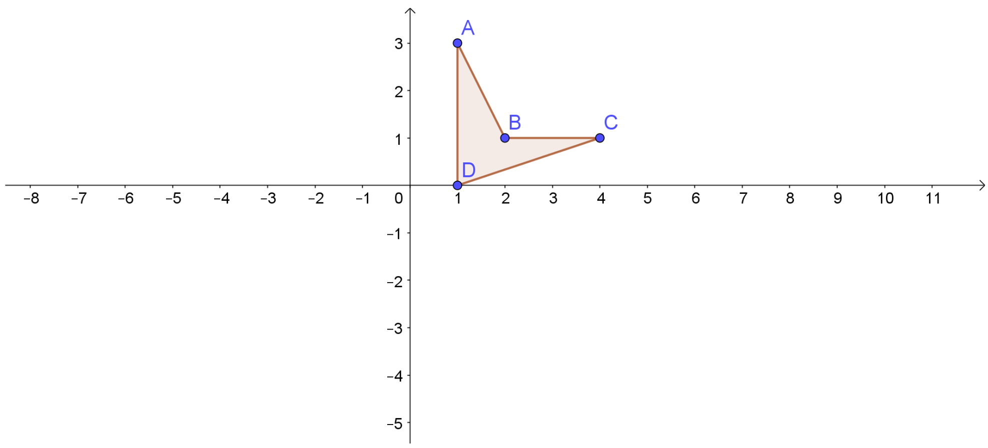
Una expanción a lo largo del eje x con una $k = 2$, una rotación de $180°$ con centro en $(0, 0)$,seguida de una simetría axial respecto al eje y.



Actividad 8 Halla la ecuación de la imagen de la recta $y = -4x + 3$, bajo la multiplicación por

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Actividad 9 Dada la figura.Realizar una Rotación a $135°(+)$ y luego una reflexión respecto al eje x seguida de una simetría central respecto a $(0,0)$. Calcula una matriz TL de composición y dibuja el movimiento.



Actividad 10 Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones dadas: en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.

a) $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(2,1) = (1,2)$, $f(-1,0) = (1,1)$

b) $f : \Re^2 \to \Re^3$, $f(1,3) = (0,0,1)$, $f(3,1) = (0,0,2)$

c) $f : \Re^3 \to \Re^2$, $f(1,2,1) = (2,0)$, $f(-1,0,1) = (1,3)$, $f(0,2,2) = (3,3)$

d) $f : \Re^3 \to \Re^3$, $f(0,1,1) = (1,2,3)$, $f(-1,2,1) = (-1,0,1)$, $f(-1,3,2) = (0,2,3)$

e) $f : \Re^3 \to \Re^3$, $f(1,1,1) = (1,0,0)$, $f(1,1,0) = (2,4,0)$, $f(1,0,0) = (1,2,0)$

Actividad 11 Sea $f : \Re^2 \to \Re^2$,la transformación lineal definida por $f(x_1, x_2) = (-3x_1 + x_2, 6x_1 - 2x_2)$.

a) ¿Cuál de los siguientes vectores pertenecen al $N_u f$?

$(5,15)$ $(3,4)$ $(0,0)$

b) ¿Cuáles de los siguintes vectores pertenecen a $I_m f$?

$(1,-2)$ $(-6,12)$ $(5,0)$ $(0,0)$

Actividad 12 Halla $N_u f$ de la $I_m f$ en cada caso.

a) $f : \Re^3 \to \Re^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$

b) $f : \Re^3 \to \Re^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$

c) $f : \Re^4 \to \Re^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4)$

d) $f : \Re^{2x2} \to \Re^{3x2}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & a_{21} + a_{22} \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix}$

Guia 5:Autovectores y Autovalores

Actividad 1 Determina los Autovalores y los correspondientes Autovectores de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Actividad 2 Del ejercicio anterior *diagonalizar* en los casos que sea posible.

Actividad 3 Halla los Autovalores y Autovectores de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Actividad 4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$, calcular la potencia A^n (diagonalizar).

Actividad 5 Halla la potencia enésima de la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

Actividad 6 Dada la matriz A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculen sus Autovalores, Autovectores y A^n

Actividad 7 Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los Autovalores de A , A^2 y A^3. ¿ Qué relación hay entre ellos?.

b) Calcular los Autovalores de $2A$ y $-3A$. ¿Qué observas?

Aplicaciones a la Geometría Analítica

Actividad 8 Identificar las siguientes cónica mediante una rototraslación conveniente y graficar.

a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 6$

b) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5}y = \dfrac{3}{8}$

c) $-x^2 + 6xy - y^2 = 1$

d) $-x^2 + 6xy - y^2 + x + y = \dfrac{15}{4}$

e) $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 1$

Actividad 9 Encontrar $k \in \Re$ tal que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2k+1 \\ -k+\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable y con autos vectores ortogonales. Para el valor de k determinado, identificar la curva $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$.

Actividad 10 Encontrar todos los valores $a \in \Re$ tales que $x^2 + 2axy + 4y^2 = 1$ represente un par de rectas. Gaficar para algunos valor de k determinado.

Guia 6:Parciales y Finales

Actividad 1 El Salón de belleza *bonitas* cuenta con tres sucursales A , B y C y realizan trabajos de cortes-tinturas de cabellos y depilaciones. Debido a la distribución de sus empleados especializados y disponibilidad de los mismos , la sucursal A tiene un máximo de 100 hs, la B un máximo de 80 hs y la C 80 hs.

- Un trabajo de *depilación* en la sucursal A requiere 1hs, en la B 40 minutos, miéntras que en la C 1hs 20 min.
- Un trabajo de *corte y tintura* requiere 2 hs en A, 1hs 40 minutos en B y 40 minutos en C.

Si un trabajo de depilación cuesta \$250 y corte - tintura \$300. Determinar el número de depilaciones, tinturas y cortes de cabellos que se deberán realizar para obtener la **máxima ganancia**.

Actividad 2 Resolver

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3w &= 0 \\ x - 3y + z + 2w &= -2 \\ 5x - 3y + 2z + 2w &= 5 \\ 3x - 2y - 4z &= -13 \end{cases}$$

Actividad 3 Balancear utilizando un sistema de ecuaciones homogéneo.

$$K_4Fe(CN)_6 + H_2SO_4 + H_2O \rightleftharpoons K_2SO_4 + FeSO_4 + (NH_4)_2SO_4 + CO$$

Actividad 4 El Salón de belleza *bonitas* cuenta con tres sucursales A , B y C y realizan trabajos de cortes-tinturas de cabellos y depilaciones. Debido a la distribución de sus empleados especializados y disponibilidad de los mismos , la sucursal A tiene un máximo de 100 hs, la B un máximo de 80 hs y la C 80 hs.

- Un trabajo de *depilación* en la sucursal A requiere 1hs, en la B 40 minutos, miéntras que en la C 1hs 20 min.
- Un trabajo de *corte y tintura* requiere 2 hs en A, 1hs 40 minutos en B y 40 minutos en C.

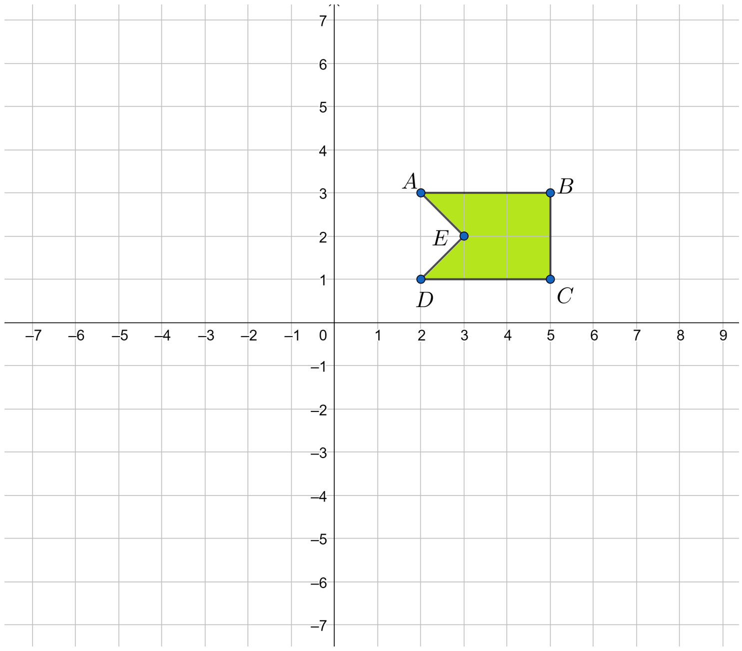
Si un trabajo de depilación cuesta \$250 y corte - tintura \$300. Determinar el número de depilaciones, tinturas y cortes de cabellos que se deberán realizar para obtener la **máxima ganancia**.

Actividad 5 Resolver $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Actividad 6 Demostrá que f es una transformación lineal.$f : \Re^3 \to \Re^2 / f(x, y, z) = (3x - 2y, 2y + z)$

Actividad 7 Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de transformación que se ajuste a cada movimiento. Realiza el dibujo.

a) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.
b) Reflexión respecto al eje y.
c) Compresión $k = \frac{1}{2}$ respecto a los dos ejes.



Actividad 8 Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones: $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(1,2) = (2,6)$, $f(-1,0) = (-2,0)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.

Actividad 9 Diagonalizar $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

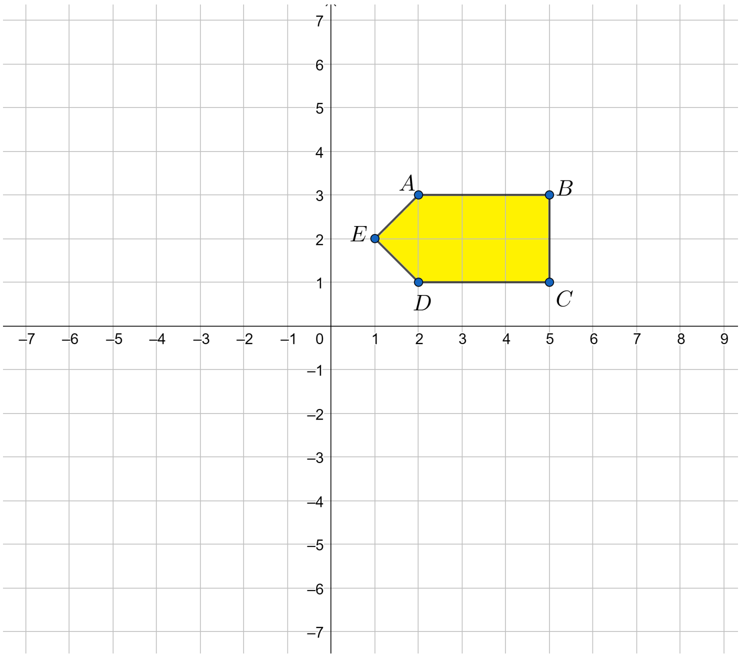
Actividad 10 Identificar las siguientes cónica mediante una rototraslación conveniente y graficar.

$$3x^2 + 8x\,y + 9y^2 = 6$$

Actividad 11 Demostrá que f es una transformación lineal. $f : \Re^3 \to \Re^2 / f(x,y,z) = (x-3y, -x+2z)$

Actividad 12 Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de transformación que se ajuste a cada movimiento. Realiza el dibujo.

a) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.
b) Reflexión respecto al eje y.
c) Compresión $k = \frac{1}{2}$ respecto a los dos ejes.



Actividad 13 Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones: $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(1,2) = (-1,3)$, $f(0,1) = (-1,1)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.

Actividad 14 Diagonalizar $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Actividad 15 Identificar las siguientes cónica mediante una rototraslación conveniente y graficar.

$$7x^2 - 6\sqrt{3}x\,y + 13y^2 - 16 = 0$$

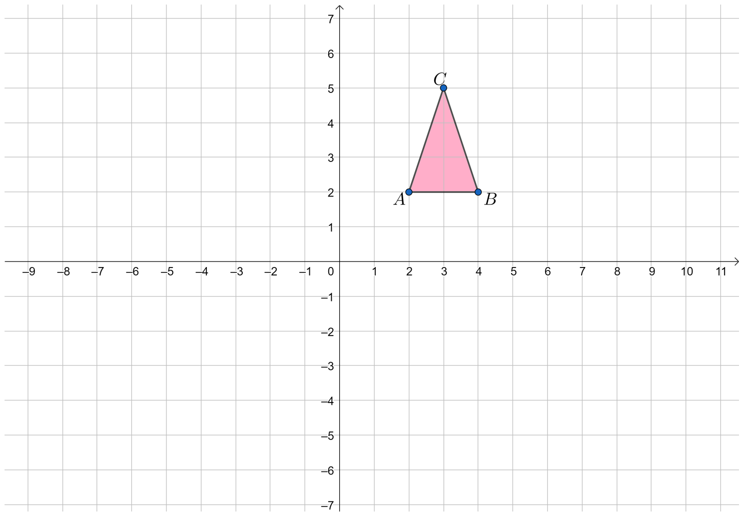
Actividad 16 Demostrá que f es una transformación lineal.$f : \Re^3 \to \Re^2 / f(x,y,z) = (3x, y + 3z)$

Actividad 17 Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de transformación que se ajuste a cada movimiento. Realiza el dibujo.

a) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.

b) Reflexión respecto al eje y.

c) Compresión $k = \frac{1}{2}$ respecto a los dos ejes.



Actividad 18 Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones: $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(1,2) = (3,10)$, $f(-1,0) = (-3,0)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.

Actividad 19 Diagonalizar $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

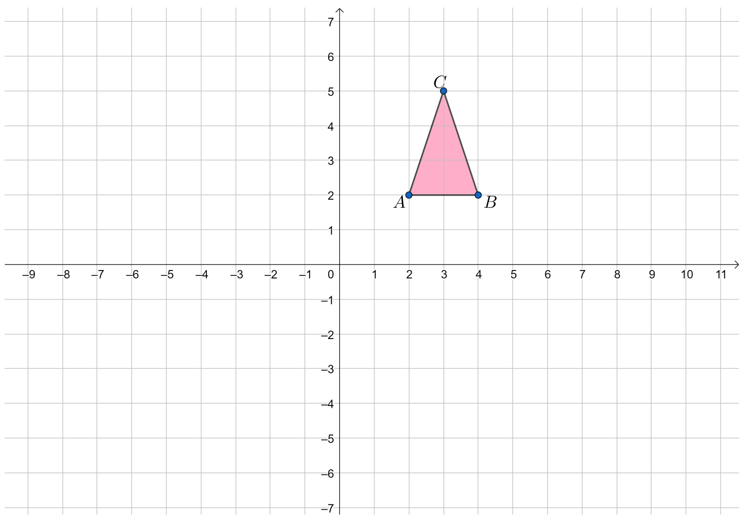
Actividad 20 Identificar las siguientes cónica mediante una rototraslación conveniente y graficar.

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 1$$

Actividad 21 Demostrá que f es una transformación lineal. $f : \Re^3 \to \Re^2 / f(x,y,z) = (x-y, z-y)$

Actividad 22 Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de transformación que se ajuste a cada movimiento. Realiza el dibujo.

a) Rotación con centro en el origen de 180° sentido anti-horario.
b) Reflexión respecto al eje x.
c) Compresión $k = \frac{1}{2}$ respecto a los dos ejes.



Actividad 23 Existen diferentes tipos de gas refrigerante utilizados en aire acondicionado, y sistemas de refrigeración entre ellos podemos encontrar $R22$, $R12$ y $R502$ entre otros. El $R22$ Es un gas poco contaminante por su bajo contenido de cloro y sirve para aires acondicionados hogareños, mientras que el $R12$ es más contaminante y destruye más la capa de OZONO y es utilizado para heladeras. Luego está el $R502$ que se utiliza para heladeras industriales. Javier es un técnico y tiene 24 l de $R22$, 36 l de $R12$ y 32 l de $R502$. Los equipos hogareños cargan 240 ml y el técnico cobra 1300 $ la carga, Las heladeras cargan 400 ml y se cobra 2000 $ y las heladeras industriales cargan 500 ml y se cobra 2500 $.

a) Dibuje la región factible y escriba las ecuaciones de restricción.

b) ¿Cuántas cargas de cada tipo debería hacer el técnico para que la ganancia sea máxima?

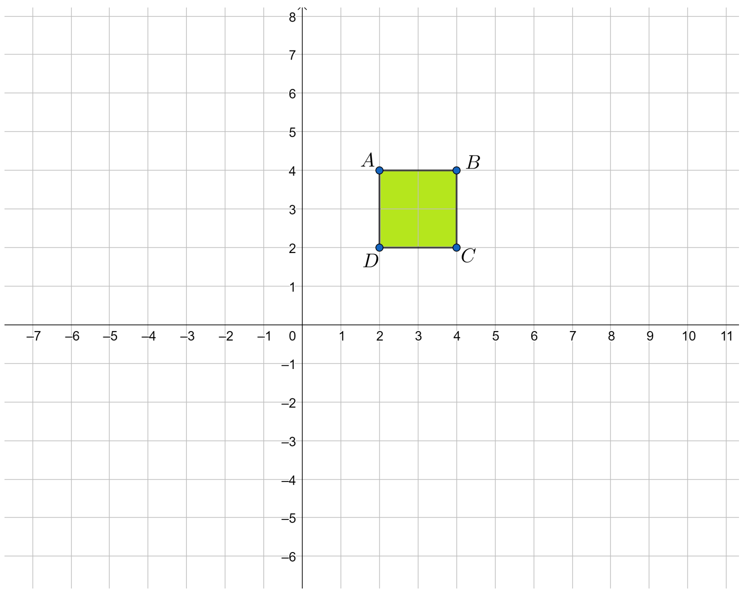
Actividad 24 Demostrá que f es una transformación lineal.$f : \Re^3 \to \Re^2 / f(x, y, z) = (x-y, y+z)$

Actividad 25 Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de composición de transformación $\mathcal{C}$ que se ajuste al movimiento. Realiza el dibujo y utiliza la matriz $\mathcal{C}$ para obtener el dibujo final.

a) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.

b) Reflexión respecto al eje y.

c) Expansión $k = 2$ respecto al eje x.



Actividad 26 Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones: $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(1,0) = (2,0)$, $f(1,-2) = (2,2)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.

Actividad 27 Diagonalizar $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

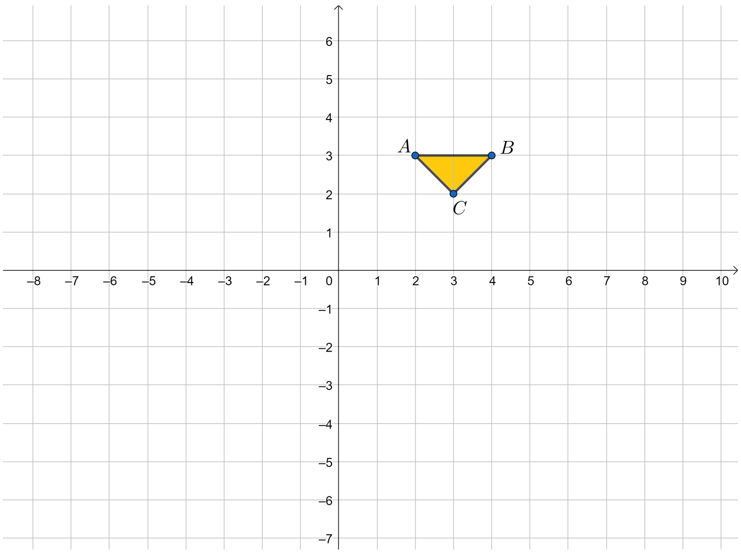
Actividad 28 Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de composición de transformación $\mathcal{C}$ que se ajuste al movimiento. Realiza el dibujo y utiliza la matriz $\mathcal{C}$ para obtener el dibujo final.

a) Reflexión respecto al eje x.

b) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.

c) Simetría central respecto al origen.

d) Expansión $k = 3$ respecto al eje x.



Actividad 29 Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones: $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(1,0) = (1,2)$, $f(1,-2) = (-3,0)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.

Guia 6:Respuestas

AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

Actividad 1

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,
$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ imposible.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $H(\lambda_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $H(\lambda_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 \cong -0,634$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 2,394 \\ 0,241 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

j) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Actividad 2 a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

e) imposible

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

i) No hay suficientes valores propios racionales

j) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ La matriz no es diagonalizable porque no tiene 3 vectores propios linealmente independiente.

Actividad 3 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -3$, $H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ -37 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $H(\lambda_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $H(\lambda_4) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Actividad 4 teorema: $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ si A es diagonalizable.

Actividad 5 $\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 2 \ H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 9 - 12 \cdot 2^{n+1} & 6 - 3 \cdot 2^{n+1} \\ 12 \cdot (-1 + 2^n) & -8 + 9 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

Actividad 6 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \to \lambda_1 = a - 1 \ , \ \lambda_2 = a + 1 \ H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

$H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(a-1)^n + (a+1)^n \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Actividad 8 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{17}{2} \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{53}{2} \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3A = (-1) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$