



PRIMER PARCIAL

Tema 3

8/11/2018

Nombre y apellido:.....

1. Demostrá que f es una transformación lineal. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x, y, z) = (3x, y + 3z)$

Solución:

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ $v = (x_2, y_2, z_2)$

(i) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$$f(u + v) = [3(x_1 + x_2); y_1 + y_2 + 3(z_1 + z_2)]$$

$$f(u + v) = (3x_1 + 3x_2; y_1 + y_2 + 3(z_1 + z_2))$$

$$f(u + v) = (3x_1 + 3x_2; y_1 + y_2 + 3(z_1 + z_2))$$

$$f(u + v) = (3x_1; y_1 + 3z_1) + (3x_2; y_2 + 3z_2)$$

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ cumple}$$

(ii) $f(\lambda u) = f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (3\lambda x; \lambda y + 3\lambda z) = \lambda(3x; y + 3z)$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) \text{ cumple}$$

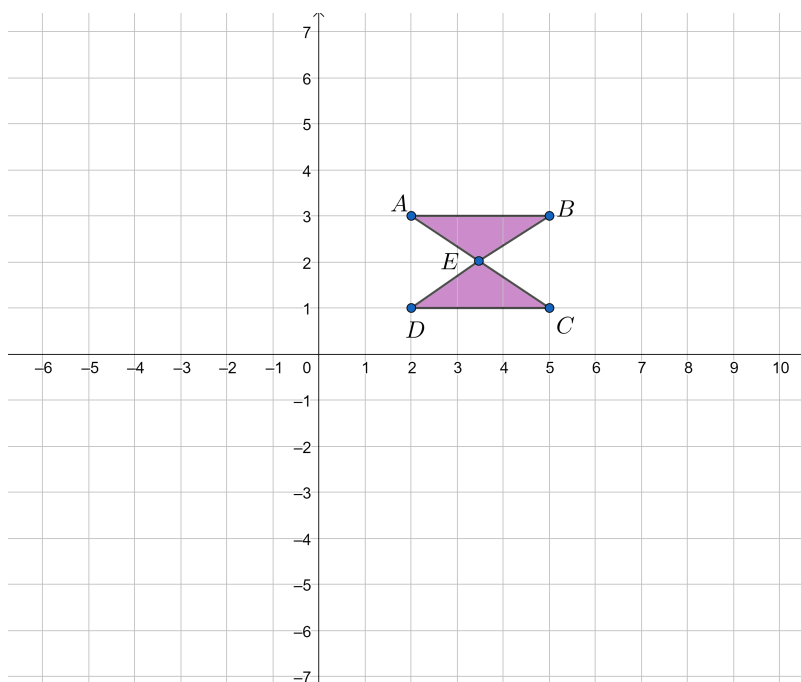
$$f(0, 0, 0) = (0, 0)$$

2. Realizá los movimientos $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y deduce la matriz de transformación que se ajuste a cada movimiento. Realiza el dibujo.

a) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.

b) Reflexión respecto al eje y.

c) Compresión $k = \frac{1}{2}$ respecto a los dos ejes.



Solución:

$$A_1 = A_{90^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Reflexión: } A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Compresión: } A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de Composición: } A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

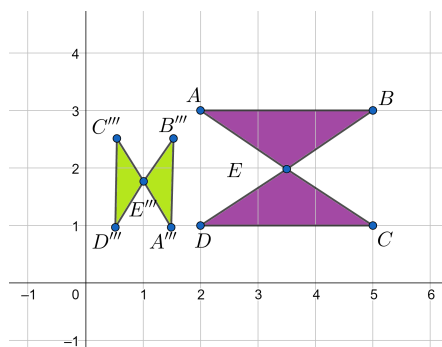
$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$C''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$D''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 1,75 \end{pmatrix}$$



3. Decida si existe una transformación lineal f que satisfice las condiciones: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(1, 2) = (3, 10)$, $f(-1, 0) = (-3, 0)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.

Solución:

$$(x, y) = \alpha (1, 2) + \beta (-1, 0) = (\alpha - \beta, 2\alpha)$$



Resolviendo el sistema obtenemos $\alpha = \frac{1}{2}y$, $\beta = \frac{1}{2}y - x$

$$(x, y) = \frac{1}{2}y(1, 2) + \left(\frac{1}{2}y - x\right)(-1, 0)$$

Aplicamos Transformación lineal

$$T(x, y) = \frac{1}{2}yT(1, 2) + \left(\frac{1}{2}y - x\right)T(-1, 0)$$

$$T(x, y) = \frac{1}{2}y(3, 10) + \left(\frac{1}{2}y - x\right)(-3, 0)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{3}{2}y, 5y\right) + \left(-\frac{3}{2}y + 3x, 0\right) = (3x, 5x)$$

$$\boxed{T(x, y) = (3x, 5x)}$$

La función es única ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

4. Diagonalizar $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Cálculo del polinomio característico y los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 24\lambda - \lambda = -\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad m = 1$$

$$\lambda_2 = 1 \quad m = 2$$

Autovectores propios.

$$H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} , \quad H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Identificar las siguientes cónica mediante una rototraslación conveniente y graficar.

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 1$$



Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos el polinomio característico } \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad m = 1$$

$$\lambda_2 = 6 \quad m = 1$$

Calculamos los autovectores:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 & -1 \\ -1 & 5-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6 & -1 \\ -1 & 5-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

los Ejes Nuevos están constituidos por: $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

$$4(x')^2 + 6(y')^2 = 1$$

