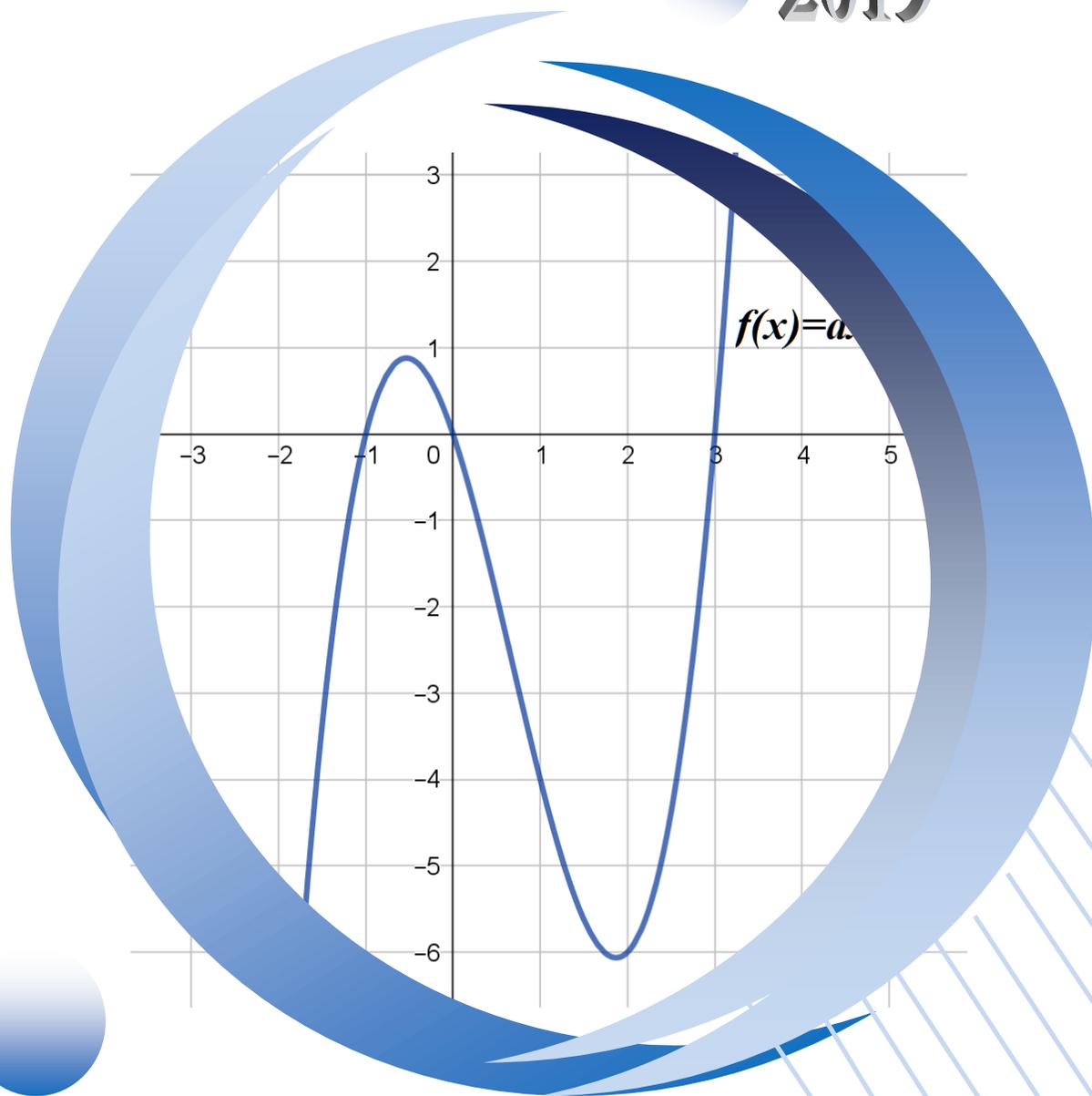


# Guías de Problemas

► Profesorado de Matemática

● 2019



## Introducción al cálculo

Lic. TOLEDO CHRISTIAN

# **Introducción al cálculo**

Profesorado de Matemática  
Departamento de matemática - ISFDyT N°44

2019



# Índice general

Índice general . . . . .	<b>3</b>
Ecuaciones de 1er y 2do grado . . . . .	7
Desigualdades . . . . .	13
Ecuaciones Exponenciales y logarítmicas . . . . .	17
Progresiones numéricas . . . . .	21
Proporcionalidad . . . . .	25
Función lineal . . . . .	33
Función cuadrática . . . . .	41
Funciones Polinómicas y Racionales . . . . .	45
Funciones Exponenciales y Logarítmicas . . . . .	53
Parciales y finales . . . . .	57



# Guia 1: Ecuaciones de 1er y 2do grado

## Ecuaciones de 1er grado

**Actividad 1** Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $-3x + 4 = -1$

b)  $4x - 3 = -5x + 6$

c)  $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$

d)  $6(2y + 3) - 4(y - 5) = 0$

e)  $\frac{1}{5}x + 4 = 5 - \frac{2}{7}x$

f)  $0,3(3 + 2x) + 1,2x = 3,2$

g)  $\frac{3 + 5x}{5} = \frac{4 - x}{8}$

h)  $\frac{13 + 2x}{4x + 1} = \frac{3}{4}$

i)  $6 - \frac{5}{x} = 4 + \frac{3}{4}$

j)  $\frac{2x - 9}{4} = 2 + \frac{x}{12}$

k)  $\frac{3}{7x - 2} = \frac{9}{3x + 1}$

l)  $\frac{3}{y} + \frac{6}{y} - \frac{1}{y} = 11$

m)  $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

n)  $(x + 5)^2 + 3 = (x - 2)^2$

ñ)  $(4x - 7)(2x + 3) - 8x(x - 4) = 0$

o)  $(2x + 9)(4x - 3) = 8x^2 - 12$

p)  $\frac{3x + 1}{6x - 2} = \frac{2x + 5}{4x - 13}$

q)  $\frac{2}{5} + \frac{4}{10x + 5} = \frac{7}{2x + 1}$

**Actividad 2** Demuestre que la ecuación es una identidad.

a)  $(4x - 3)^2 - 16x^2 = 9 - 24x$

b)  $(3x - 4)(2x + 1) + 5x = 6x^2 - 4$

c)  $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = x - 4$

d)  $\frac{5x^2 + 8}{x} = \frac{8}{x} + 5x$

e)  $\frac{x^3 + 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$

f)  $\frac{49x^2 - 25}{7x - 5} = 7x + 5$

**Actividad 3** La fórmula se presenta en la aplicación indicada. Despeje la variable especificada.

a)  $I = Prt$  despeje  $P$  (interés simple)

b)  $C = 2\pi r$  despeje  $r$  (Circunferencia de un círculo)

c)  $A = \frac{1}{2}bh$  despeje  $h$  (área de un triángulo)

- d)  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  despeje  $h$  (volumen del cono)
- e)  $F = g \frac{mM}{d^2}$  despeje  $m$  (ley de Newton de la gravitación)
- f)  $R = \frac{V}{I}$  despeje  $I$  (ley de Ohm en la corriente eléctrica)
- g)  $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$  despeje  $v_0$  (distancia que cae un objeto)
- h)  $S = \frac{p}{q+p(1-q)}$  despeje  $q$  (ley de Amdayi para supercomputadoras)
- i)  $S = 2(hw + hw + hl)$  despeje  $h$  (área superficial de una caja rectangular)
- j)  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  despeje  $q$  (ecuación de una lente)
- k)  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$  despeje  $R_2$  (tres resistores conectados en paralelos)

## Resolución de problemas

**Actividad 4 Calificaciones de examen.** Un estudiante en un curso de *introducción al cálculo* tiene calificaciones de examen de 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación en el siguiente examen subirá el promedio del estudiante a 80?

**Actividad 5 Promedio final de clase.** Antes del examen final, un estudiante tiene calificaciones de examen de 72, 83, 65, 73 y 62. Si el examen final cuenta como de la calificación final, ¿qué calificación debe recibir el estudiante para tener un promedio final de 76?

**Actividad 6 Costo de comer fuera.** Una pareja no desea gastar más de \$700 por comer en un restaurante. Si se agrega un impuesto de venta de 8% a la cuenta y piensan dar una propina de 15% después de agregar el impuesto, ¿cuánto es lo más que pueden gastar en la comida?

**Actividad 7 Cociente de inteligencia.** El cociente de inteligencia (CI) de una persona se determina al multiplicar por 100 el cociente de su edad mental y su edad cronológica.

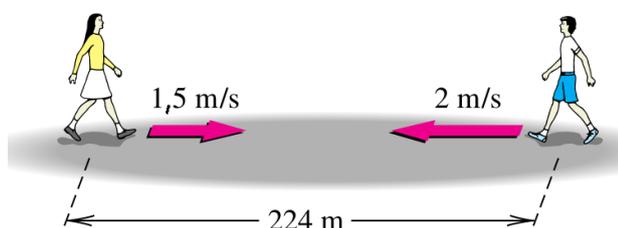
- a) Encuentre el CI de un niño de 10 años de edad cuya edad mental es de 15.
- b) Encuentre la edad mental de una persona de 15 años de edad cuyo CI es 140.

**Actividad 8 Área superficial de la Tierra.** El agua cubre 70,8%, o sea  $361 \times 10^6 km^2$  de la superficie de la Tierra. Aproxime el área superficial total de la Tierra.

**Actividad 9 Costo de aislamiento.** El costo de instalar aislamiento en una casa particular de dos recámaras es \$24 000. Los costos mensuales de calefacción actuales promedian \$2000, pero se espera que el aislamiento reduzca los costos en 10%. ¿Cuántos meses tardará en recuperarse el costo del aislamiento?

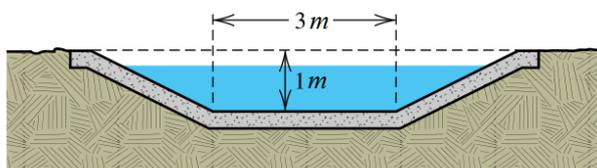
**Actividad 10 Paga de tiempo extra.** El sueldo base por hora de un trabajador es \$120, pero él recibe una y media veces su sueldo por cualesquiera horas trabajadas que excedan de 40 por semana. Si su cheque de paga para la semana es \$7140, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?

**Actividad 11 Rapidez de caminata.** Dos niños, que están a 224 metros entre sí, empiezan a caminar uno hacia el otro en el mismo instante a un ritmo de  $1,5 \text{ m/s}$  y  $2 \text{ m/s}$ , respectivamente (vea la figura).



- ¿Cuándo se encontrarán?
- ¿Cuánto habrá caminado cada uno?

**Actividad 12 Dimensiones de una zanja** Toda sección transversal de una zanja es un trapecio isósceles con una pequeña base de 3 m y una altura de 1 m, como se ve en la figura.



Determine el ancho de la base más grande que daría a la zanja un área de sección de  $5 \text{ m}^2$ .

## Ecuaciones cuadráticas

**Actividad 13** resuelvan la ecuación cuadrática por factorización.

a)  $6x^2 + x - 12 = 0$

c)  $2x(4x + 15) = 27$

b)  $15x^2 - 6 = -13x$

d)  $75x^2 + 35x - 10 = 0$

e)  $12x^2 + 60x + 75 = 0$

i)  $48x^2 + 12x - 90 = 0$

f)  $4x^2 + 13x - 35 = 0$

j)  $4x^2 - 72x + 324 = 0$

g)  $15x^2 - 14 = 29x$

k)  $\frac{x}{x+3} + \frac{1}{x} - 4 = \frac{9}{x^2+3x}$

h)  $x(3x + 10) = 77$

l)  $\frac{5x}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{-6}{x^2-2x}$

**Actividad 14** Resuelva la ecuación usando la ecuación cuadrática especial.

a)  $x^2 = 225$

d)  $4(x + 7)^2 = 13$

b)  $25x^2 = 9$

e)  $x^2 = 361$

c)  $(x - 3)^2 = 17$

f)  $64x^2 = 49$

**Actividad 15** Determine el valor o valores de  $d$  que completan el cuadrado para la expresión.

a)  $x^2 + 9x + d$

c)  $x^2 + 17x + d$

b)  $x^2 + dx + 36$

d)  $x^2 + dx + 25$

**Actividad 16** Resuelva completando el cuadrado.

a)  $x^2 + 6x - 4 = 0$

c)  $x^2 - 10x + 20 = 0$

b)  $4x^2 - 12x - 11 = 0$

d)  $4x^2 + 20x + 13 = 0$

**Actividad 17** Resuelva usando la fórmula cuadrática

a)  $6x^2 - x = 2$

g)  $5x^2 + 13x = 6$

b)  $x^2 + 6x + 3 = 0$

h)  $x^2 - 4x - 2 = 0$

c)  $2x^2 - 3x - 4 = 0$

i)  $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$

d)  $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$

e)  $\frac{5}{w^2} - \frac{10}{w} + 2 = 0$

j)  $30x + 9 = -25x^2$

f)  $4x^2 + 81 = 36x$

k)  $\frac{5}{3}S^4 + 3S^2 + 1 = 0$

**Actividad 18** La fórmula se presenta en la aplicación indicada. Despeje la variable especificada.

a)  $K = \frac{1}{2}mv^2$  despeje  $v$  (energía cinética)

b)  $F = g\frac{mM}{d^2}$  despeje  $d$  (Ley de Newton de gravitación)

c)  $A = 2\pi r(r + h)$  despeje  $r$  (área superficial de un cilindro)

d)  $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$  despeje  $t$  (distancia que cae un objeto)

**Actividad 19 Velocidad de un gas** Cuando un gas caliente sale de una chimenea cilíndrica, su velocidad varía en toda una sección transversal circular de la chimenea, con el gas cerca del centro de la sección transversal que tiene una mayor velocidad que el gas cerca del perímetro. Este fenómeno puede ser descrito por la fórmula

$$V = V_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

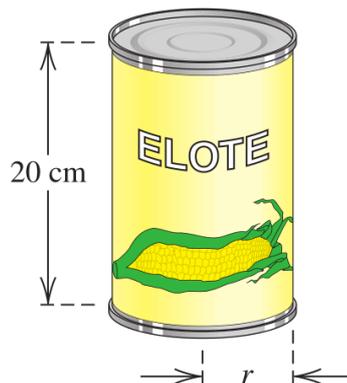
donde  $V_{max}$  es la velocidad máxima del gas,  $r_0$  es el radio de la chimenea y  $V$  es la velocidad del gas a una distancia  $r$  del centro de la sección transversal circular. De esta fórmula, despeje  $r$ .

**Actividad 20 Densidad de la atmósfera** Para altitudes  $h$  de hasta 10 000 metros, la densidad  $D$  de la atmósfera de la Tierra (en  $kg/m^3$ ) se puede aproximar con la fórmula

$$D = 1,225 - (1,12 \times 10^{-4})h + (3,24 \times 10^{-9})h^2$$

Aproxime la altitud si la densidad de la atmósfera es  $0,74kg/m^3$ .

**Actividad 21 Dimensiones de una lata** Un fabricante de latas desea construir un bote cilíndrico circular recto de altura 20 centímetros y capacidad de  $3000 \text{ cm}^3$  (vea la figura). Encuentre el radio interior  $r$  de la lata.



**Actividad 22 Tiro de una pelota de béisbol.** Una pelota de béisbol es lanzada directamente hacia arriba. El número de metros  $s$  sobre el suelo después de  $t$  segundos está dado por la ecuación.

$$s = -16t^2 + 64t$$

- ¿Cuándo estará la pelota a  $14,4 \text{ m}$  sobre el suelo?
- ¿Cuándo regresará al suelo?

**Actividad 23 Distancia de frenado** La distancia que un auto recorre entre el momento en que el conductor toma la decisión de pisar el freno y el tiempo en que el auto en realidad se detiene es la distancia de frenado. Para un cierto auto que corre a  $v$   $km/h$ , la distancia de frenado  $d$  (metros) está dada por  $d = v + (v^2/20)$ .

- Encuentre la distancia de frenado cuando  $v$  es  $150$   $km/h$ .
- Si un conductor decide frenar a  $360$   $m$  de un señalamiento de parada, ¿qué tan rápido puede ir el auto y todavía detenerse en el momento en que llegue al señalamiento?

## Otros tipos de Ecuaciones

**Actividad 24** Resuelva la ecuación.

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| a) $ x + 4  = 11$               | j) $\sqrt{7 - 5x} = 8$                              |
| b) $ 3x - 2  + 3 = 7$           | k) $4 + \sqrt[3]{1 - 5t} = 0$                       |
| c) $3 x + 1  - 5 = -11$         | l) $\sqrt[5]{2x^2 + 1} - 2 = 0$                     |
| d) $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$  | m) $3\sqrt{2x - 3} + 2\sqrt{7 - x} = 11$            |
| e) $3x^3 - 5x^2 - 12x + 20 = 0$ | n) $\sqrt{3 - x} - x = 3$                           |
| f) $ x - 7  = 3$                | ñ) $\sqrt{1 + 3x} + \sqrt{6x + 3} = \sqrt{-6x - 1}$ |
| g) $2 5x + 2  - 1 = 5$          | o) $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$            |
| h) $ x - 3  + 6 = 6$            | p) $6u^{-\frac{1}{2}} - 13u^{-\frac{1}{4}} + 6 = 0$ |
| i) $y^{\frac{3}{2}} = 5y$       |   |

## Guia 2:Desigualdades

### Desigualdades

**Actividad 1** Expresar la desigualdad como intervalo y trazar su gráfica.

- |               |                      |
|---------------|----------------------|
| a) $x < -2$   | e) $-2 < x \leq 4$   |
| b) $x \geq 4$ | f) $3 \leq x \leq 7$ |
| c) $x \leq 5$ | g) $5 > x \geq -2$   |
| d) $x > -3$   | h) $-3 \geq x > -5$  |

**Actividad 2** Expresar el intervalo como una desigualdad en la variable  $x$ .

- |                  |                    |
|------------------|--------------------|
| a) $(-5, 4]$     | d) $(-\infty, -7)$ |
| b) $[-8, -1]$    | e) $[0, 4)$        |
| c) $[4, \infty)$ | f) $(-\infty, 2]$  |

**Actividad 3** Resolver la desigualdad y expresar las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

- |   |  |
|---|--|
| a) $2x + 5 \leq 8$                          | j) $(x - 3)(x + 3) \geq (x + 5)^2$       |
| b) $3 - 5x < 11$                            | k) $(x - 4)^2 > x(x + 12)$               |
| c) $x - 6 > 5x + 3$                         | l) $ x  < 8$                             |
| d) $9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}x$ | m) $ x  \geq 5$                          |
| e) $4 \geq 3x + 5 > -1$                     | n) $ x + 2  + 0,1 \geq 0,2$              |
| f) $-2 < \frac{4x + 1}{3}$                  | ñ) $ 2x + 5  < 4$                        |
| g) $5 \geq \frac{6 - 5x}{3}$                | o) $2 -11 - 7x  - 2 > 10$                |
| h) $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \leq 5$           | p) $\left  \frac{2x + 5}{3} \right  < 1$ |
| i) $(2x - 3)(4x + 5) \leq (8x + 1)(x - 7)$  | q) $\frac{2}{ 2x + 3 } \geq 5$           |

Expresar el enunciado en términos de una desigualdad que contenga un valor absoluto.

**Actividad 4** El peso  $w$  de un luchador debe ser  $\pm 1kg$  de  $70 kg$ .

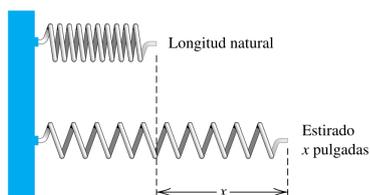
**Actividad 5** El radio  $r$  de un cojinete debe estar a no más de  $0,01$  centímetros respecto de  $1$  centímetro.

**Actividad 6** La diferencia de dos temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  en una mezcla química debe estar entre  $5^\circ\text{C}$  y  $10^\circ\text{C}$ .

**Actividad 7** El tiempo de llegada  $t$  del tren  $B$  debe ser al menos  $5$  minutos diferente de las  $4 : 00 p.m.$ , el tiempo de llegada del tren  $A$ .

**Actividad 8 Escalas de temperatura** Las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ . ¿Qué valores de  $F$  corresponden a los valores de  $C$  tales que  $30 \leq C \leq 40$ ?

**Actividad 9 Ley de Hooke** De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza  $F$  (en  $kg$ ) necesaria para estirar cierto resorte  $x$  centímetros más de su longitud natural está dada por  $F = (4,5)x$  (vea la figura). Si  $10 \leq F \leq 18$ , ¿cuáles son los valores correspondientes para  $x$ ?



## Otras desigualdades

**Actividad 10** Establezca la solución de cada desigualdad.

a)  $x^2 + 4 > 0$

c)  $x^2 + 4 < 0$

b)  $x^2 + 9 > 0$

d)  $x^2 + 9 < 0$

**Actividad 11** Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

a)  $(3x + 1)(5 - 10x) > 0$

f)  $x^2 - 2x - 7 > 1$

b)  $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$

g)  $x(2x + 3) \geq 5$

c)  $(2 - 3x)(4x - 7) \geq 0$

h)  $25x^2 - 16 < 0$

d)  $(x - 6)(x + 3)(-2 - x) < 0$

i)  $x^4 + 5x^2 \geq 36$

e)  $x^2 - x - 6 < 0$

j)  $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

k)  $x^2 - 4x - 15 \leq 6$

m)  $\frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

l)  $\frac{x^2(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \leq 0$

n)  $\frac{1}{x - 2} \geq \frac{3}{x + 1}$

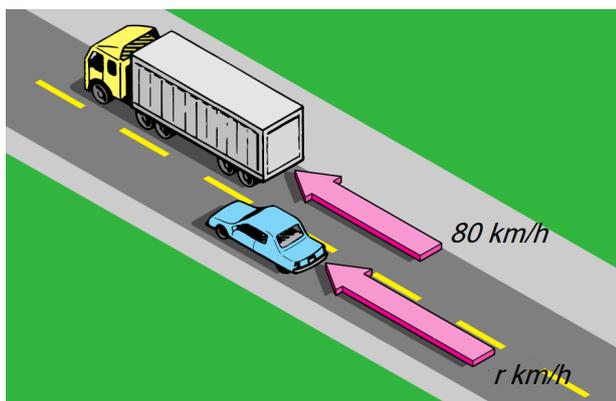
**Actividad 12** Cuando una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria recta, su velocidad  $v$  (en  $cm/s$ ) en el tiempo  $t$  (en segundos), está dada por la ecuación. ¿Para qué subintervalos del intervalo de tiempo dado  $[a, b]$  su velocidad será al menos  $k$   $cm/s$ ?

a)  $v = t^3 - 3t^2 - 4t + 20$  ;  $[0, 5]$  ;  $k = 8$

b)  $v = t^4 - 4t^2 + 10$  ;  $[1, 6]$  ;  $k = 10$

**Actividad 13 Velocidad del viento** Un avión voló a favor del viento durante 30 minutos y regresó la misma distancia en 45 minutos. Si la velocidad de crucero del avión fue de  $514$   $km/h$ , ¿cuál fue la velocidad del viento?

**Actividad 14 Velocidad de rebase** Un automóvil de  $6$  m de largo rebasa a un camión de  $12$  m de largo que corre a  $80$   $km/h$  (vea la figura). ¿A qué velocidad constante debe correr el auto para pasar al camión en  $5$  segundos?



**Actividad 15 Velocidad de una lancha rápida** Una lancha deja un muelle hacia el este a  $30$   $km/h$ . Otra lancha sale desde el mismo muelle  $20$  minutos más tarde, hacia el oeste a  $40$   $km/h$ . ¿Cuánto tiempo después de la salida de la primera de las lanchas rápidas estarán separadas  $60$   $km$ ?

**Actividad 16 Rapidez de trote** Una chica recorre  $8$   $km$  en  $24$  minutos menos de lo que tarda en correr  $12$   $km$ . Suponiendo que se mueve a una velocidad constante, encuentre su rapidez de trote en millas por hora.  $5$   $km/h$



# Guia 3: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

## Ecuaciones exponenciales

**Actividad 1** Resuelva la ecuación.

a)  $7^{x+6} = 7^{3x-4}$

b)  $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$

c)  $2^{-100x} = (0,5)^{x-4}$

d)  $25^{x-3} = 125^{4-x}$

e)  $4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} = 8 \cdot (2^x)^2$

f)  $9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot (3^x)^{-2}$

**Actividad 2** Cambie a la forma logarítmica.

a)  $4^3 = 64$

b)  $t^r = s$

c)  $57t = \frac{a+b}{a}$

d)  $3^5 = 243$

e)  $c^p = d$

f)  $4^{-3} = \frac{1}{64}$

**Actividad 3** Cambie a la forma exponencial.

a)  $\log_2 32 = 5$

b)  $\log_t r = p$

c)  $\log_2 m = 3x + 4$

d)  $\log_3 81 = 4$

e)  $\log_v w = q$

f)  $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

g)  $\log_3 (x+2) = 5$

h)  $\log_b 512 = \frac{3}{2}$

**Actividad 4** Despeje  $t$  usando los logaritmos en base  $a$ .

a)  $2a^{t/3} = 5$

b)  $K = H - Ca^t$

c)  $3a^{4t} = 10$

d)  $F = D + Ba^t$

**Actividad 5** Encuentre el número, si es posible.

a)  $\log_5 1$

b)  $\log_7 7^2$

c)  $\log_4 \frac{1}{16}$

d)  $\log_8 1$

e)  $\log_6 6^7$

f)  $\log_2 128$

g)  $10^{\log 3}$

h)  $\log 0,0001$

i)  $e^{\ln 2}$

j)  $10^{-1+\log 5}$

k)  $e^{2+\ln 3}$

**Actividad 6** Resuelva la ecuación.

a)  $\log_4(x + 4) = \log_4(8 - x)$

b)  $\log_3(x + 4) = \log_3(1 - x)$

c)  $\log_5(x - 2) = \log_5(3x + 7)$

d)  $\log_2(x - 5) = \log_7(6x)$

e)  $\log x^2 = \log(-3x - 2)$

f)  $\log_3(x - 4) = 2$

g)  $\ln^2 \ln x = 9$

h)  $e^{x \ln 2} = 0,25$

**Actividad 7 Hallar una rapidez de crecimiento** Cambie  $f(x) = 1000(1,05)^x$  a una función exponencial con base  $e$  y aproxime el porcentaje de crecimiento de  $f$ .

**Actividad 8 Hallar una rapidez de crecimiento** Cambie  $f(x) = 50(9/8)^x$  a una función exponencial con base  $e$  y aproxime una rapidez de crecimiento de  $f$ .

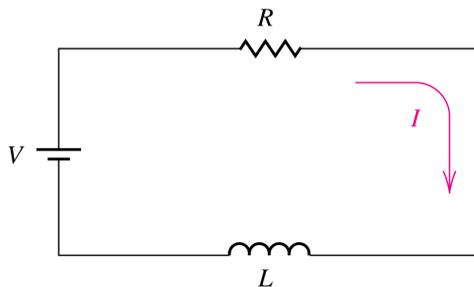
**Actividad 9 Hallar una rapidez de decaimiento** Cambie  $f(x) = 20(0,97)^x$  a una función exponencial con base  $e$  y aproxime la rapidez de decaimiento de  $f$ .

**Actividad 10 Hallar una rapidez de decaimiento** Cambie a una función  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  exponencial con base  $e$  y aproxime la rapidez de decaimiento de  $f$ .

**Actividad 11 Decaimiento del radio** Si empezamos con  $q_0$  miligramos de radio, la cantidad  $q$  restante después de  $t$  años está dada por la fórmula  $q = q_0(2)^{-t/1600}$ . Exprese  $t$  en términos de  $q$  y de  $q_0$ .

**Actividad 12 Decaimiento del isótopo de bismuto** El isótopo radiactivo de bismuto  $^{210}\text{Bi}$  se desintegra de acuerdo con  $Q = k(2)^{t/5}$ , donde  $k$  es una constante y  $t$  es el tiempo en días. Exprese  $t$  en términos de  $Q$  y  $k$ .

**Actividad 13 Circuito eléctrico** Un diagrama de un circuito eléctrico sencillo formado por un resistor y un inductor se muestra en la figura siguiente. La corriente  $I$  en el tiempo  $t$  está dada por la fórmula  $I = 20e^{-Rt/L}$ , donde  $R$  es la resistencia y  $L$  es la inductancia. De esta ecuación despeje  $t$ .



**Actividad 14** Exprese en términos de logaritmos de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  o  $w$ .

- a)  $\log_4(xz)$   
 b)  $\log_3(xyz)$   
 c)  $\frac{x^3w}{y^2z^4}$   
 d)  $\frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$   
 e)  $\ln \sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5z}}$   
 f)  $\log_a \frac{y^5w^2}{x^4z^3}$

**Actividad 15** Escriba la expresión como un logaritmo.

- a)  $\log_3 x + \log_3(5y)$   
 b)  $\frac{1}{5} \log_3 y$   
 c)  $\log_4(3z) + \log_4 x$   
 d)  $\frac{1}{3} \log_4 w$   
 e)  $2\log_a x - \frac{1}{3}\log_a(x-2) - 5\log_a(2x+3)$   
 f)  $5\log_a x - \frac{1}{2}\log_a(3x-4) - 3\log_a(5x+1)$

**Actividad 16** Resuelva la ecuación.

- a)  $\log_6(2x-3) = \log_6 24 - \log_6 3$   
 b)  $\log_4(3x+2) = \log_4 7 + \log_4 3$   
 c)  $\log x - \log(x+1) = 3\log 4$   
 d)  $\log(x+2) - \log x = 2\log 4$   
 e)  $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln 9$   
 f)  $\log_2(x+7) + \log_2 x = 3$

**Actividad 17 Volumen y decibeles** Cuando se aumenta el control de volumen de un equipo de estéreo, el voltaje en los terminales del altavoz cambia de  $V_1$  a  $V_2$ , y el aumento de decibeles en ganancia está dado por

$$db = 20\log \frac{V_2}{V_1}$$

- a) Encuentre el aumento de decibeles si el voltaje cambia de 2 volts a 4,5 volts.  
 b) ¿Qué razón de voltaje  $k$  se necesita para una ganancia de +20 decibeles?, ¿y para una ganancia de +40 decibeles?

**Actividad 18 Ley de Pareto** La ley de Pareto para países capitalistas expresa que la relación entre el ingreso anual  $x$  y el número  $y$  de individuos cuyo ingreso excede de  $x$  es

$$\log y = \log b - k \log x$$

donde  $b$  y  $k$  son constantes positivas. De esta ecuación despeje  $y$ .

**Actividad 19 Precio y demanda** Si  $p$  denota el precio de venta (en dólares) de una mercancía y  $x$  es la demanda correspondiente (en número vendido por día), entonces la relación entre  $p$  y  $x$  está dada a veces por  $p = p_0 e^{-ax}$ , donde  $p_0$  y  $a$  son constantes positivas. Expresar  $x$  como función de  $p$ .

**Actividad 20** Estime utilizando la fórmula de cambio de base.

a)  $\log_5 12$

c)  $\log_6 5$

b)  $\log_9 0,9$

d)  $\log_6 \frac{1}{3}$

## Guia 4: Progresiones numéricas

### Sucesiones

**Actividad 1** Dado el término general, escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones:

a)  $a_n = 2n + 5$       b)  $a_n = 3 - 2n$       c)  $a_n = \frac{2n + 1}{n + 2}$       d)  $a_n = n^2 + 1$

**Actividad 2** Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones recurrentes:

a)  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b)  $a_1 = -5, a_n = 3a_{n-1} + 7$

c)  $a_1 = -2, a_2 = 4, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

d)  $a_1 = 2, a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$

**Actividad 3** Escribe los términos  $a_{10}$  y  $a_{25}$  de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = 3n - 1$       b)  $b_n = \frac{n^2 + 1}{2}$       c)  $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

**Actividad 4** Halla el término general de las sucesiones:

a) 12, 14, 16, 18, ...      c) 1, 3, 5, 7, ...

b)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$       d) 1, 3, 9, 27, ...

### Progresiones aritméticas

**Actividad 5** En la progresión aritmética 8, 13, 18, 23, ... calcula:

- a) su término general  
 b)  $a_{25}$   
 c)  $a_{40}$

**Actividad 6** Calcula el primer término de una progresión aritmética, sabiendo que la diferencia es 84 y el décimo término 459.

**Actividad 7** Calcular la diferencia de una progresión aritmética, sabiendo que sus términos primero y séptimo son 8 y 72, respectivamente.

**Actividad 8** Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a)  $d = 5$  ,  $a_8 = 37$

b)  $d = 2$  ,  $a_{11} = 17$

**Actividad 9** Los términos tercero y séptimo de una progresión aritmética son 11 y 35, respectivamente. Calcula el primer término.

**Actividad 10** Calcula la suma de los términos de una progresión aritmética de doce términos, sabiendo que el primero es  $-1$  y el último 121.

**Actividad 11** El primer término de una progresión aritmética es 20, y su diferencia  $-2$ . Calcula la suma de los sus catorce primeros términos.

**Actividad 12** Calcula la suma de los términos de una progresión aritmética, sabiendo que tiene ocho términos, que el último término es 65, y que su diferencia es 8.

**Actividad 13** Halla el número de términos de una progresión aritmética, sabiendo que el primero y el último son  $-1$  y 13, respectivamente, y que la diferencia es 2.

**Actividad 14** Un jardinero desea plantar árboles formando con ellos un triángulo de modo que haya un árbol en la primera fila, dos árboles en la segunda, tres en la tercera,..... ¿Cuántos árboles plantará si forma un total de 41 filas?

**Actividad 15** Durante 15 días se observó el crecimiento del tallo de una semilla germinada. El primer día medía 10 *mm* y el último 80 *mm*. ¿Cuánto creció diariamente si el tallo aumentó en una cantidad fija cada día?

## Progresiones geométricas

**Actividad 16** El primer término de una progresión geométrica es 3, la razón 2, y el número de términos 6. Calcula su último término.

**Actividad 17** Calcula el número de términos de una progresión geométrica, sabiendo que:  
 $r = 3$ .

**Actividad 18** Calcula la razón de las siguientes progresiones geométricas:

a) 1, 2, 4, 8, 16,.....

b) 5, -5, 5, -5, 5,.....

**Actividad 19** Calcula el término octavo de la progresión: 2, 6, 18, 54,... Utilizando la fórmula del término general.

**Actividad 20** Calcula la razón de una progresión geométrica que consta de nueve términos, siendo 2 el primero y 781250 el último.

**Actividad 21** Calcula la suma de las 10 primeras potencias de 2.

**Actividad 22** Calcula la suma de los términos de la progresión geométrica: 5, 10,..., 20480.

**Actividad 23** Calcula la suma de los términos indicados, por la fórmula de la suma de los  $n$  primeros terminos, de las siguientes progresiones:

a) los diez primeros términos de 5, 8, 11, 14...

b) los seis primeros términos de 3, 6, 12, 24,...

**Actividad 24** Cuenta la leyenda que Shirham, rey de la india, quedó tan impresionado con el juego del ajedrez que prometió conceder como recompensa a su inventor, Lahur, lo que quisiese. Este solicitó la cantidad de trigo que resultase de colocar un grano en la primera casilla del tablero de ajedrez e ir añadiendo sucesivamente en cada casilla el doble de granos que en la anterior. ¿Cuántos granos de trigo pidió Lahur?

**Actividad 25** Rosa decide comenzar ahorrar para el viaje de estudios y mete en su alcancía \$ 20. Cada semana deposita la misma cantidad que la anterior y \$ 1 más.

a) ¿Cuánto dinero ahorraría al cabo de 16 semanas?

b) ¿Qué cantidad de dinero conseguiría si hubiera empezado ahorrar 10 semanas antes?

**Actividad 26** En un examen, las preguntas estaban ordenadas según su dificultad. La primera valía 2 puntos y cada una de las restantes valía 3 puntos más que la anterior. Si en total valía el examen 40 puntos. ¿Cuántas preguntas tenía el examen?

**Actividad 27** Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:

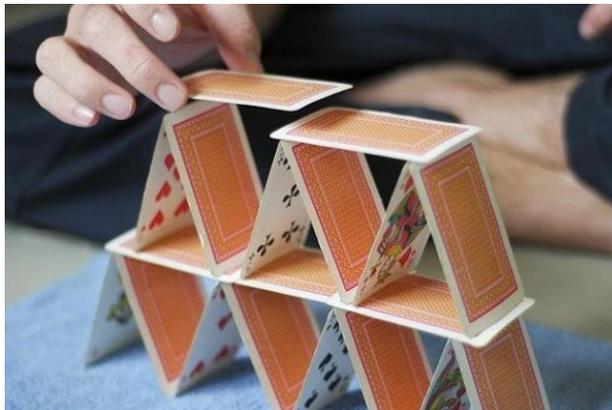
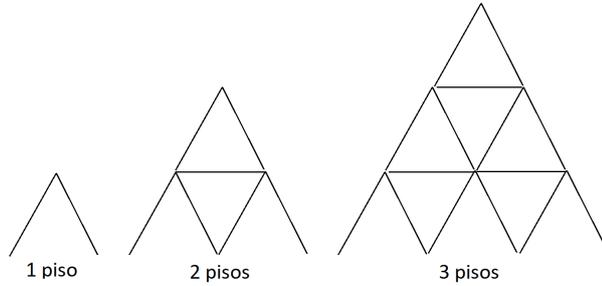
a)  $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots$

b) 0, 6; 0, 3; 0, 15, ...

**Actividad 28** Un tipo de bacteria se reproduce por bipartición cada cuarto de hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?

**Actividad 29** La población de cierto país aumenta por término medio un 1,12% anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿Cuánto será la población dentro de 10 años?

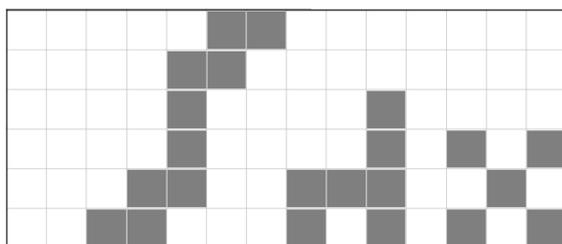
**Actividad 30** Para hacer una torre de naipes de 1 piso se usan 2 naipes, para hacerla de 2 pisos se usan 7 naipes, para hacerla de 3 pisos se usan 15 naipes.  
¿Cuántos naipes hay que usar para hacer una torre de 100 pisos?



# Guia 5: Proporcionalidad

## Razones y proporciones

**Actividad 1** Halla la razón entre el área sombreada y el área de toda la figura.



**Actividad 2** Calcula las razones  $\frac{AB}{BC}$ ,  $\frac{BC}{CD}$ ,  $\frac{CD}{BC}$



**Actividad 3** Decí en cada caso, si  $a : b :: c : d$ .

a)  $a = -2$        $b = 5$        $c = 3,6$        $d = -9$

b)  $a = 3$        $b = \frac{1}{2}$        $c = 4$        $d = 1,5$

c)  $a = 12$        $b = 0,2$        $c = -8$        $d = -\frac{2}{15}$

d)  $a = 2, \hat{3}$        $b = 0, \hat{3}$        $c = 1,4$        $d = 0,2$

**Actividad 4** Encuentra el número que falta en cada proporción:

a)  $\frac{8}{24} = \frac{x}{18}$

b)  $\frac{10}{y} = \frac{20}{45}$

c)  $\frac{25}{19} = -\frac{50}{z}$

d)  $\frac{x}{9} = \frac{4}{-5}$

e)  $\frac{2}{y} = \frac{y}{8}$

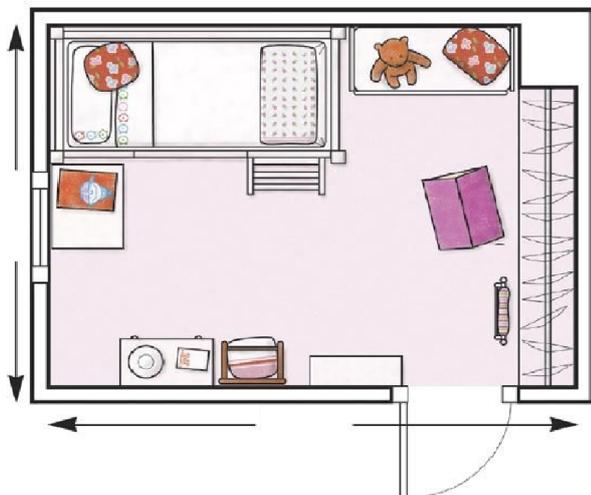
f)  $\frac{10}{10+z} = \frac{5}{8}$

g)  $\frac{(2 - \frac{1}{5})^2}{\frac{3}{25}} = \frac{x}{2 - 0,2}$

h)  $\frac{(2 - \frac{1}{2})}{x} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{(4 - \frac{1}{4})^{-1}}$

i)  $\frac{1 - \frac{1}{3}}{x} = \frac{x}{50(0,5 + \frac{3}{2} + 3)}$

**Actividad 5** El plano de una casa está dibujado a escala  $1\text{cm} : \frac{1}{2}m$ . Una de las habitaciones mide  $6\text{cm}$  por  $7,5\text{cm}$  en el plano. ¿Cuál es la medida de la habitación?

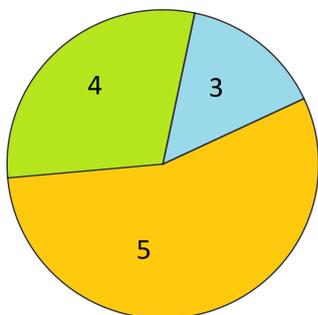


### Reparto proporcional

**Actividad 6** Un abuelo reparte \$ 1200 entre sus tres nietos en forma proporcional a las notas que obtuvieron en matemática. Juan sacó 7, María 8 y Daniela 9. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

**Actividad 7** En un edificio de propiedad horizontal, las expensas se liquidan en forma proporcional al área del departamento. Este mes las expensas totales ascendieron a \$ 11 160. Las áreas de cada uno de los 5 departamentos son:  $U1 = 60m^2$ ,  $U2 = 54m^2$ ,  $U3 = 72m^2$ ,  $U4 = 90m^2$ ,  $U5 = 96m^2$ . ¿Cuánto debe abonar cada propietario?

**Actividad 8** Un círculo se partió en tres sectores circulares de áreas proporcionales a los números 3, 4 y 5, respectivamente. ¿Qué ángulo central corresponde a cada sector?



### Proporcionalidad directa e inversa

**Actividad 9** Dí si las siguientes magnitudes son proporcionales y en el caso de que lo sean, indica si esa proporcionalidad es inversa o directa:

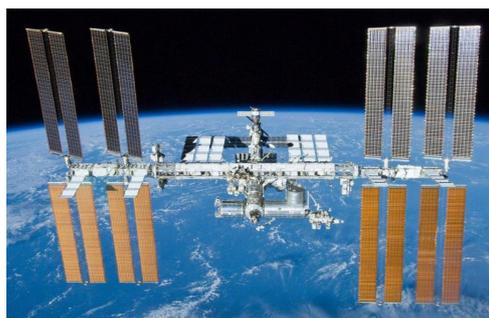
- a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.
- b) El número de golosinas y el dinero que pagó por todas ellas.
- c) El peso de una persona y el número de canas que tiene en la cabeza.
- d) El número de pasteleros y el tiempo que tardan en hacer una tarta.
- e) El número de zapato que usa una persona adulta y su peso.
- f) El tiempo que tardan los bomberos en apagar un incendio y el número de bomberos.
- g) El número de alumnos de un aula y el dinero que entrega cada alumno para pagar el autobús de una excursión.

**Actividad 10** Completa la siguiente tabla:

Nº de obreros	2	4	8	20	1
Tiempo(horas)	5				

Nº de helados	2	5	15	25	1
Precio	10				

**Actividad 11** La ISS (estación espacial internacional) viaja a  $27\,000\text{ km/h}$  y da la vuelta a la tierra en 90 minutos. Expresa la razón entre los minutos que tarda en dar un vuelta y los minutos que tiene el día.



**Actividad 12** Una fuente llenó un bidón de 6 litros en 4 minutos. ¿Cuántos decalitros de agua llenará en una hora y media?

**Actividad 13** Un ciclista a  $20\text{ km/h}$  tarda media hora en ir de una villa a la aldea vecina. ¿Cuánto tardará un motorista a  $50\text{ km/h}$ ?

**Actividad 14** Para recorrer un camino, la rueda anterior de un carro, de 75 cm de diámetro, da 72 vueltas. ¿Cuántas vueltas da la rueda posterior si tiene 90 cm de diámetro?

**Actividad 15** De un cuadrado de  $1600 \text{ cm}^2$  se puede cortar 16 cuadrados de  $100 \text{ cm}^2$ . Si se cortan cuadrados de  $400 \text{ cm}^2$ . ¿Cuántos cuadrados se obtienen?

**Actividad 16** Ana tiene que hacer una paella, para lo cual sabe que debe utilizar la proporción de dos vasos de agua por uno de arroz.

- a) Si echa seis vasos de agua, ¿cuántos debe echar de arroz?
- b) Si echa cinco vasos de arroz, ¿cuántos debe echar de agua?

**Actividad 17** Ocho obreros hacen una zanja en quince días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo doce obreros?

**Actividad 18** Un granjero tiene comida para alimentar a 100 ovejas durante 25 días; si compra 35 ovejas más, ¿cuántos días le durará la comida?

## Porcentajes

**Actividad 19** Calcula el siguiente porcentaje: 2% del 10% del 30% de 2500.

**Actividad 20** En un colegio el 75% del papel que se gasta es reciclado. Si en un día se utilizan 2500 folios, ¿cuántos folios reciclados gastarán en una semana?

**Actividad 21** ¿A qué tanto por ciento equivale una rebaja de \$ 200 en \$ 800 ?

**Actividad 22** De los 180 km proyectados para una autopista, ya se completaron 63 km. ¿Qué porcentaje ya está construida?



**Actividad 23** Una televisión que costaba \$ 10 200 se vendió por \$ 9 800 . ¿Qué porcentaje se rebajó?

**Actividad 24** Pagamos \$ 2575 por una bicicleta rebajada un 15%. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

**Actividad 25** Un viticultor recogió 216 *kg* de uva, lo que supone un 20% más que el año pasado. ¿Cuántos kilos recogió el año pasado?

**Actividad 26** Las piezas y la mano de obra para reparar un coche costaron \$ 85 000 . ¿Cuál es el importe de la factura si hay que añadir el 18% de IVA?

### Regla de tres compuesta

**Actividad 27** 4 obreros Trabajando 7 horas diarias construyen un muro en 3 días. ¿Cuántos días tardarán 2 obreros trajando 6 horas diarias en construir un muro igual?.

**Rta:**7 días

**Actividad 28** 5 autobuses transportan 800 pasajeros en 4 viajes.¿Cuántos viajes son necesarios para trasportar 400 pasajeros usando 2 autobuses?.

**Rta:**5 viajes

**Actividad 29** 9 grifos Abiertos durante 40 horas han consumido 200 litros de agua. ¿Cuántos litros consumen 15 grifos durante 9 horas?.

**Rta:**75 litros

**Actividad 30** En una fabrica trabajando 8 horas diarias han fabricado 2000 ruedas en 5 días. ¿Cuántos días tardarán en fabricar 3000 ruedas si trabajan 10 horas diarias?.

**Rta:**7 horas

**Actividad 31** 30 terneros consumen 2100 kg de pienso en 7 días. ¿Durante cuántos días se podrá alimentar a 15 terneros si tenemos 600 kg de pienso?.

**Rta:**4 días

**Actividad 32** 15 obreros trabajando 7 horas diarias construyen una casa en 40 días.¿Cuaántos obreros serán necesarios para construir 8 casas iguales en 60 días trabajando 8 horas diarias?.

**Rta:**70 obreros

**Actividad 33** Si 6 leñadores talan 300 arboles trabajando 6 horas durante 9 días. ¿Cuántos días necesitan 10 trabajando 9 horas diarias para talar 150 árboles que le faltan?.

**Actividad 34** Si con 4 grifos de agua de diámetro 2cm se obtienen 300 litros en determinado tiempo, ¿cuántos litros se obtienen en el mismo tiempo con 2 grifos de 3cm de diámetro?

*Rta:* Por tanto, se obtienen 225 litros de agua con 2 grifos de diámetro 3cm.

**Actividad 35** Se sabe que 6 mangueras abiertas durante 3 horas equivalen a 10.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenar una piscina de 130.000 litros con 4 de estas mangueras?



*Rta:* se necesitan 58 horas y media para llenar la piscina.

**Actividad 36** Un equipo de 8 programadores trabajará 6 horas diarias para desarrollar un software en un año. Si se forma un equipo de 10 programadores trabajando 4 horas diarias, ¿cuántos años se necesitan para realizar un proyecto de la misma envergadura?

*Rta:* se necesitarán 1,2 años

**Actividad 37** El estadio monumental de River plate tiene una superficie de 7.140 metros cuadrados. Para cortar su césped se emplean 3 máquinas cortacésped funcionando durante 5 horas. ¿Cuánto tiempo se requiere para cortar el césped de un estadio cuya superficie sea la mitad si se emplean 7 máquinas?



**Rta:** se necesitan 1,07 horas. Es decir, 1 hora, 4 minutos y 12 segundos.

**Actividad 38** Una compañía dispone de 5 máquinas de refresco que llenan 280 botellas que se venden por un total de 400 dólares. Si la compañía compra 3 nuevas máquinas embotelladoras para ganar un total de 550 dólares, ¿cuántas botellas deben llenar?

**Rta:** deben llenarse 616 botellas.

**Actividad 39** John y Paul tienen una banda y componen 6 canciones en 15 días. Si llaman a su amigo George para que les ayude durante 5 días, ¿cuántas canciones compondrán?

**Rta:** compondrán 3 canciones.

**Actividad 40** Un atleta entrenó 2 horas diarias durante 30 días y adelgazó 5 kilos. Si entrenara solamente 20 días, pero lo hiciera por 3 horas, ¿cuántos kilos perdería?



**Rta:** perdería el mismo número de kilos.

**Actividad 41** Un novelista que escribe 15 páginas en 90 minutos a una velocidad de 22 palabras por minuto necesita escribir 10 páginas cada 75 minutos para terminar su libro dentro del plazo. ¿Cuántas palabras por minuto debe escribir? ¿Cuántas palabras tiene una página?

**Rta:** número de palabras 1980 y el número de páginas 32.



# Guia 6: Función lineal

## Sistemas de coordenadas Rectangulares

**Actividad 1** Grafique los puntos  $A(5, -2)$ ,  $B(-5, -2)$ ,  $C(5, 2)$ ,  $D(-5, 2)$ ,  $E(3, 0)$  y  $F(0, 3)$  en un plano de coordenadas.

**Actividad 2** Describa el conjunto de puntos  $P(x, y)$  en un plano de coordenadas que satisfaga la condición dada.

a)  $x = 2$

d)  $x \geq 0$

g)  $y = 0$

b)  $xy > 0$

e)  $x = 4$

h)  $\frac{y}{x} < 0$

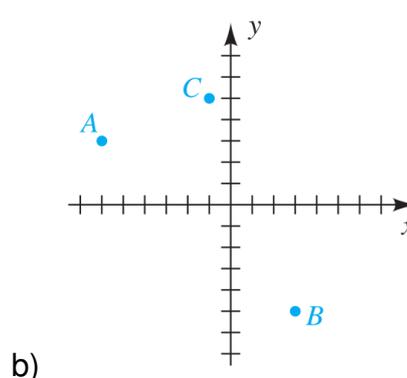
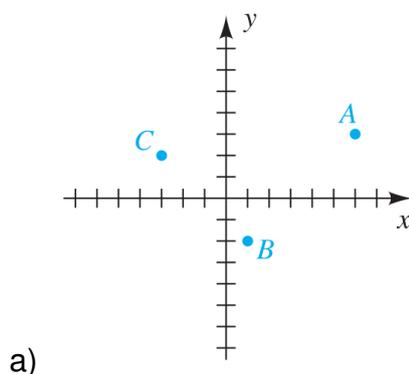
c)  $y = 5$

f)  $y > 1$

**Actividad 3** a) Encuentre la distancia  $d(A, B)$  entre  $A$  y  $B$ .

b) Encuentre el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ .

**Actividad 4** Demuestre que los triángulos con vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  es un triángulo rectángulo, y encuentre el área.



**Actividad 5** Demuestre que  $A(-4, 2)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(3, -1)$  y  $D(-2, -3)$  son vértices de un cuadrado.

**Actividad 6** Demuestre que  $A(-4, -1)$ ,  $B(0, -2)$ ,  $C(6, 1)$  y  $D(2, 2)$  son vértices de un cuadrado.

**Actividad 7** Dado  $A(-3, 8)$  encuentre las coordenadas del punto  $B$  tal que  $C(5, -10)$  sea el punto medio del segmento  $AB$ .

**Actividad 8** Dados los puntos  $A(5, -8)$  y  $B(-6, 2)$  encuentre el punto en el segmento  $AB$  que esté a  $\frac{3}{4}$  de la distancia de  $A$  a  $B$ .

**Actividad 9** Trace la gráfica de la ecuación y marque las intersecciones con los  $x$  e  $y$ .

a)  $y = 2x - 3$

e)  $x = \frac{1}{4}y^2$

b)  $y = -x + 2$

f)  $y = x^3 - 8$

c)  $y = -2x^2$

g)  $y = \sqrt{x - 4}$

d)  $y = 2x^2 - 1$

h)  $y = \sqrt{x} - 4$

**Actividad 10** Trace la gráfica de la circunferencia o semicircunferencia.

a)  $x^2 + y^2 = 11$

e)  $x = 4x^2 + 4y^2 = 1$

b)  $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

f)  $x^2 + (y - 2)^2 = 25$

c)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

g)  $x = -\sqrt{25 - y^2}$

d)  $y = -\sqrt{16 - x^2}$

h)  $y = \sqrt{4 - x^2}$

**Actividad 11** Encuentre el centro y radio de la circunferencia con la ecuación dada.

a)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

d)  $4x^2 + 4y^2 + 16x + 24y + 31 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 21 = 0$

**Actividad 12 Agua en una piscina** La cantidad de agua  $A$  en una piscina en el día  $x$  está dada por  $A = 12000x - 2000x^2$ , donde  $A$  está en galones y  $x = 0$  corresponde al mediodía de un domingo. Grafique  $A$  en el intervalo  $[0, 6]$  y describa la cantidad de agua en la piscina.

**Actividad 13 Velocidad del sonido** La velocidad del sonido  $v$ , en el aire varía con la temperatura. Se puede calcular en  $ft/s$  usando la ecuación  $v = 1087 \sqrt{\frac{T + 273}{273}}$ , donde  $T$  es la temperatura(en  $^{\circ}C$ ).

- Aproxime  $T = 20^{\circ}C$
- Determine la temperatura al grado más cercano, tanto algebraica como gráficamente, cuando la velocidad del sonido  $1000 ft/t$ .

## Rectas

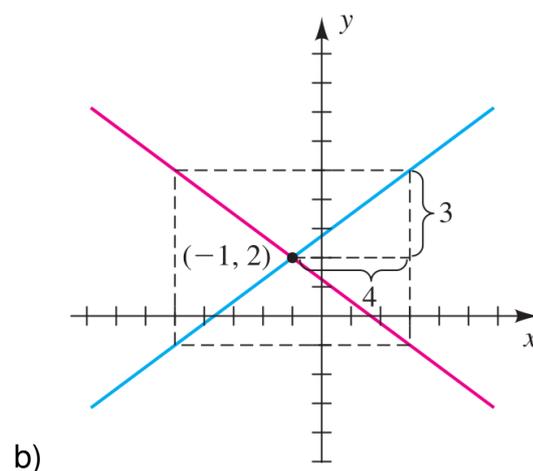
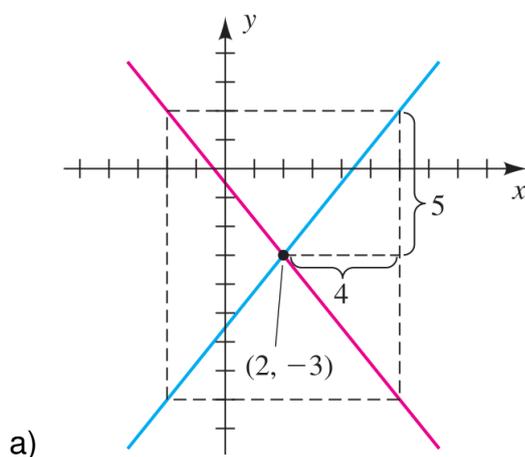
**Actividad 14** Trace la recta que pasa por  $A$  y  $B$ , y encuentre su pendiente  $m$ .

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| a) $A(-3, 2)$ , $B(5, -4)$ | d) $A(4, -1)$ , $B(-6, -3)$ |
| b) $A(3, 4)$ , $B(-6, 4)$  | e) $A(4, -3)$ , $B(4, 2)$   |
| c) $A(-3, 2)$ , $B(-3, 5)$ | f) $A(4, -2)$ , $B(-3, -2)$ |

**Actividad 15** Use las pendientes para demostrar que los puntos son vértices del polígono especificado.

- a)  $A(-2, 1)$ ,  $B(6, 3)$ ,  $C(4, 0)$ ,  $D(-4, -2)$ ; paralelogramo
- b)  $A(0, 3)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(-2, -6)$ ,  $D(-8, 2)$ ; trapecio
- c)  $A(6, 15)$ ,  $B(11, 12)$ ,  $C(-1, 8)$ ,  $D(-6, -5)$ ; rectángulo
- d)  $A(1, 4)$ ,  $B(6, -4)$ ,  $C(-15, -6)$ ; triángulo rectángulo

**Actividad 16** Escriba las ecuaciones de las rectas

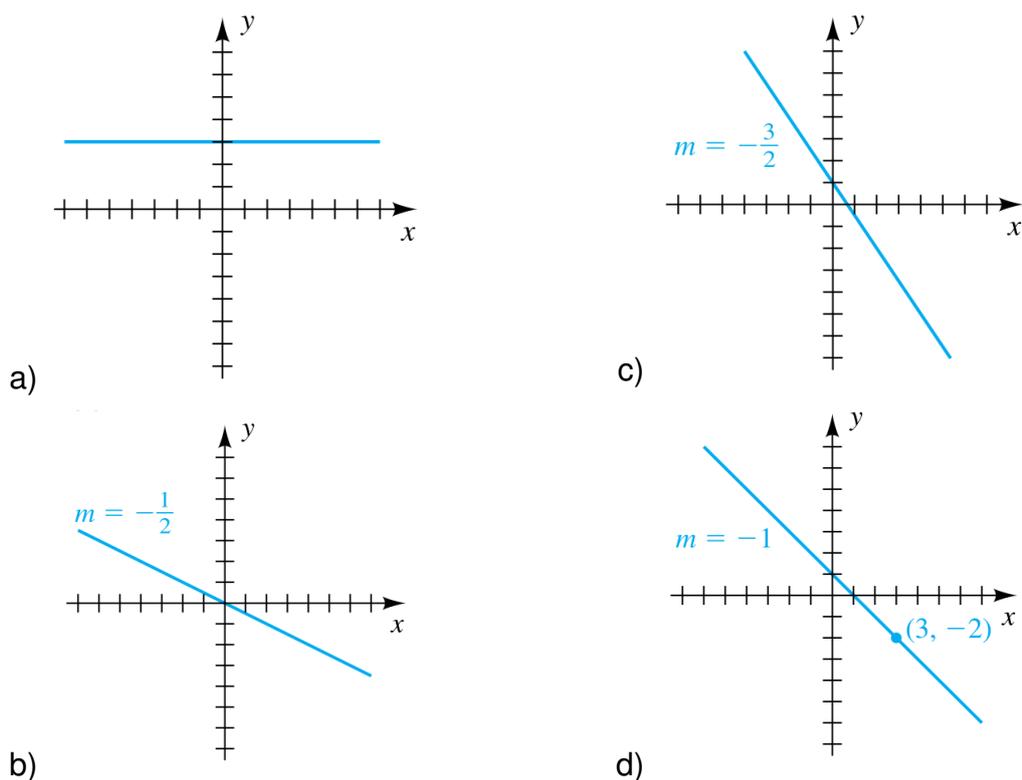


**Actividad 17** Encuentre la forma general de una ecuación de la recta que pasa por el punto  $A$  que satisfaga la condición dada.

- a)  $A(3, -1)$
- paralela al eje  $y$
  - perpendicular al eje  $y$
- b)  $A(5, -3)$ ; pendiente  $-4$

- c)  $A(4, 1)$ ; pendiente  $-\frac{1}{4}$
- d)  $A(3, -1)$ ; paralela a la recta  $5x - 2y = 4$
- e)  $A(7, -3)$ ; perpendicular a la recta  $2x - 5y = 8$

**Actividad 18** Encuentre la ecuación de la recta mostrada en la figura.



**Actividad 19** El propietario de una franquicia de helados debe pagar a la casa matriz \$1000 por mes más 5% de los ingresos mensuales  $R$ .

- a) Exprese la ganancia mensual  $G$  en términos de los ingresos mensuales  $R$ .
- b) ¿Cuánto debe ganar un propietario con un ingreso mensual de \$30000?

**Actividad 20 Vaporizar agua.** La cantidad  $H$  (en *joules*) necesaria para convertir un gramo de agua en vapor esta linealmente relacionada con la temperatura  $T$  ( $^{\circ}C$ ) de la atmósfera. A  $10^{\circ}C$  esa conversión requiere 2480 *joules* y cada  $15^{\circ}C$  de aumento en la temperatura, baja 40 *joules*.

- a) Exprese  $H$  en términos de  $T$ .
- b) ¿Cuántos *joules* se requieren para convertir un gramo de agua a una temperatura de  $40^{\circ}C$ ?
- c) ¿Y a cero grados? ¿Cuántos *joules* se requiere?

**Actividad 21 Pago de préstamo** Un estudiante universitario recibe un préstamo sin intereses de \$8250 de un familiar. El estudiante pagará \$125 al mes hasta pagar el préstamo.

- Expresar la cantidad  $P$  (en pesos) pendiente de pago en términos del tiempo  $t$  (en meses).
- ¿Después de cuántos meses el estudiante deberá \$5000?

**Actividad 22** La temperatura  $T$  bajo una nube varía linealmente según la altitud  $x$ , en el suelo la temperatura es de  $21^{\circ}\text{C}$  y a  $1000\text{ m}$  la temperatura es de  $15^{\circ}\text{C}$ .

- Hallar una Expresión  $T(x)$  que se ajuste al problema.
- Hallar la temperatura que habrá a  $1500\text{ m}$  de altitud.
- ¿A Qué altitud la temperatura es de  $3^{\circ}\text{C}$  ?
- Realiza un gráfico aproximado.



**Actividad 23 Vaporizar agua:** La cantidad  $H$  (en *joules*) necesaria para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura  $T$  (en  $^{\circ}\text{C}$ ) de la atmósfera. A  $10^{\circ}\text{C}$  ésta conversión requiere  $2480\text{ joules}$  y cada aumento en temperatura de  $15^{\circ}\text{C}$  baja la cantidad de calor necesaria en  $40\text{ joules}$ . Expresar  $H$  en términos de  $T$  que se ajuste al problema.

**Actividad 24 Isla de calor urbano** El fenómeno de una isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura fue de  $13,5^{\circ}\text{C}$  en 1915 y desde entonces ha subido  $0,032^{\circ}\text{C}$  por año.

- Suponiendo que la temperatura  $T(\text{en}^{\circ}\text{C})$  está linealmente relacionada con el tiempo  $t$  (en años) y que  $t = 0$  corresponde a 1915, expresar  $T$  en términos de  $t$ .
- Prediga el promedio de temperatura en el año 2020.

## Dominio y rango de $f(x)$

**Actividad 25** Encuentre el dominio de  $f$ .

a)  $f(x) = \sqrt{2x + 7}$

b)  $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

c)  $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$

d)  $f(x) = \frac{\sqrt{2x - 5}}{x^2 - 5x + 4}$

e)  $f(x) = \sqrt{x + 3} + \sqrt{3 - x}$

f)  $f(x) = \frac{1}{(x - 3)\sqrt{x + 3}}$

**Actividad 26** (a) Trace la gráfica de  $f$ , (b) Encuentre el dominio  $D$  y rango de  $f$ , (c) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento o constante.

a)  $f(x) = -2x + 1$

b)  $f(x) = 4 - x^2$

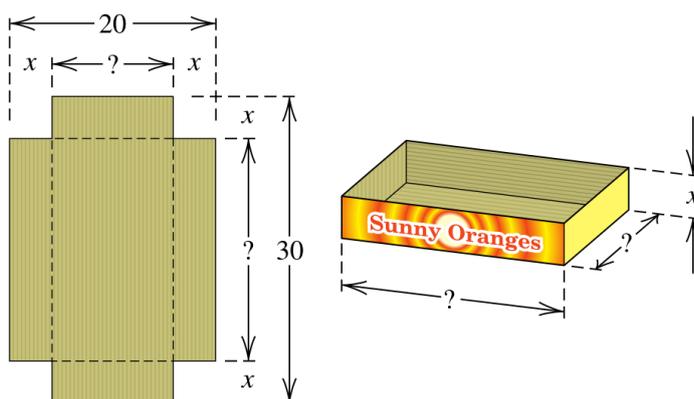
c)  $f(x) = \sqrt{x - 1}$

d)  $f(x) = -4$

e)  $f(x) = -\sqrt{36 - x^2}$

f)  $f(x) = 2x - 1$

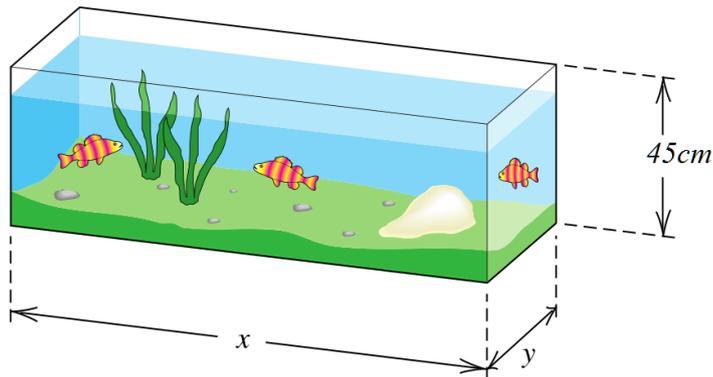
**Actividad 27 Construcción de una caja.** De una pieza rectangular de cartón que tiene dimensiones de 20 dm x 30 dm, se ha de construir una caja abierta al cortar un cuadrado idéntico de área  $x^2$  de cada esquina y voltear hacia arriba los lados (vea la figura). Exprese el volumen  $V$  de la caja como función de  $x$ .



**Actividad 28 Dimensiones de un acuario** Un acuario de 45 cm de altura debe tener un volumen de  $4050 \text{ cm}^3$ . Con  $x$  denote la longitud de la base y con  $y$  el ancho (vea la figura).

a) Exprese  $y$  como función de  $x$ .

b) Exprese el número total  $S$  de centímetros cuadrados de vidrio necesario como función de  $x$ .



**Actividad 29** Determine si  $f$  es par, impar o ninguna de éstas.

a)  $f(x) = 5x^3 + 2x$

d)  $f(x) = |x| - 3$

b)  $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 5$

e)  $f(x) = \sqrt[3]{5}$

c)  $f(x) = 8x^3 - 3x^2$

f)  $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

**Actividad 30** Trace la gráfica de  $f$ .

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

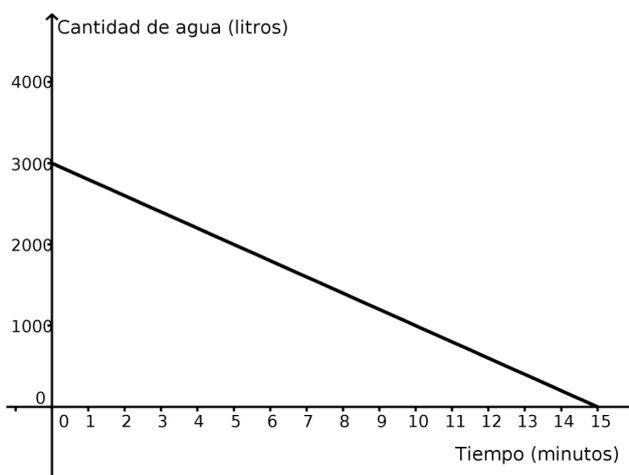
b)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } |x| \leq 2 \\ -4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Actividad 31** El gráfico representa el proceso de vaciado de un tanque de agua.



- ¿Qué cantidad de agua tenía el tanque cuando empezó a vaciarse?
- ¿Cuánto tardó en vaciarse?
- ¿Cuántos litros por minuto salían del tanque mientras se vaciaba?
- Marquen sobre el gráfico el punto que representa el momento en que el tanque tenía 2000 litros. ¿Cuánto tiempo había transcurrido desde que comenzó a vaciarse?
- Escriban una fórmula que calcule la cantidad de agua que había en el tanque a los  $x$  minutos de haber comenzado a vaciarse.

# Guia 7: Función cuadrática

## Función cuadrática

**Actividad 1** Expresar  $f(x)$  en la forma  $a(x - h)^2 + k$ .

a)  $f(x) = -x^2 - 4x + 11$

d)  $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x - 34$

b)  $f(x) = x^2 - 16x + 11$

e)  $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{23}{5}$

c)  $f(x) = 5x^2 + 20x + 14$

f)  $f(x) = 4x^2 - 12x$

**Actividad 2** (a) Use la fórmula cuadrática para hallar los ceros de  $f$ . (b) Encuentre el valor máximo o mínimo de  $f(x)$ . (c) Trace la gráfica de  $f$ .

a)  $f(x) = x^2 - 6x$

d)  $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$

b)  $f(x) = -x^2 - 6x$

e)  $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$

c)  $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$

f)  $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

**Actividad 3** Encuentre la ecuación estándar de una parábola que tiene un eje vertical y satisfice las condiciones dadas.

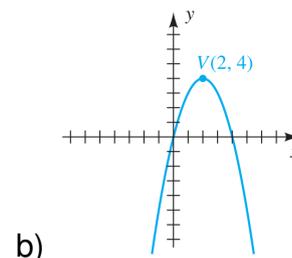
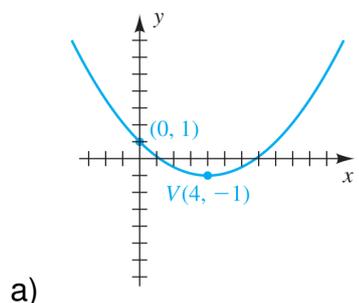
a) Vértice  $(0, -2)$ , que pasa por  $(3, 25)$ .

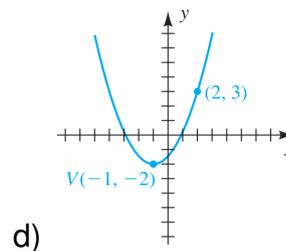
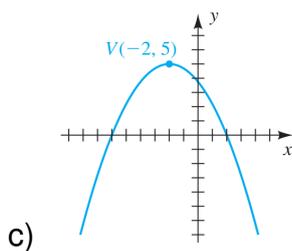
b) Vértice  $(0, 7)$ , que pasa por  $(2, -1)$ .

c) Vértice  $(4, -7)$ , interseca en  $-4$  el eje  $x$

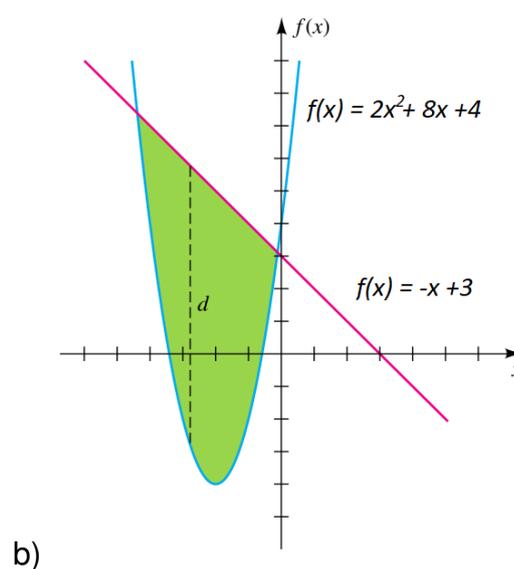
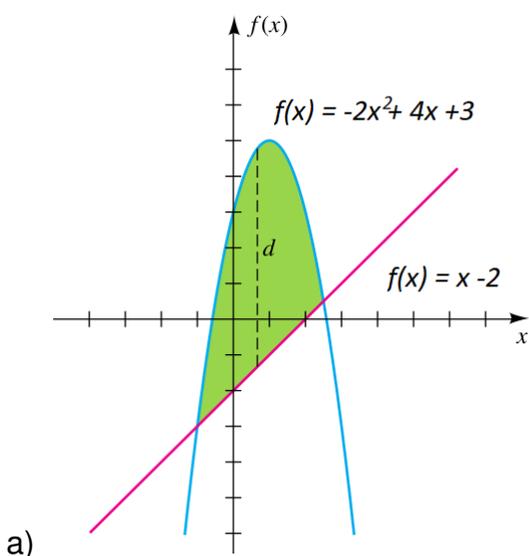
d) Interseca el eje  $x$  en  $-3$  y  $5$ , el punto más alto tiene coordenadas  $y$  en  $4$ .

**Actividad 4** Encuentre la ecuación estándar de la parábola que se muestra en la figura.





**Actividad 5** Encuentre la máxima distancia vertical  $d$  entre la parábola y la recta para la región atrapada.



**Actividad 6 Descenso de un paracaidista** Cuando un paracaidista salta desde un avión a  $2000m$  de altura, suponemos que la caída es libre, el peso es la única fuerza que actúa sobre él, la aceleración es constante y la ecuación del movimiento esta dada por

$$x(t) = 2000 - \frac{1}{2}gt^2$$

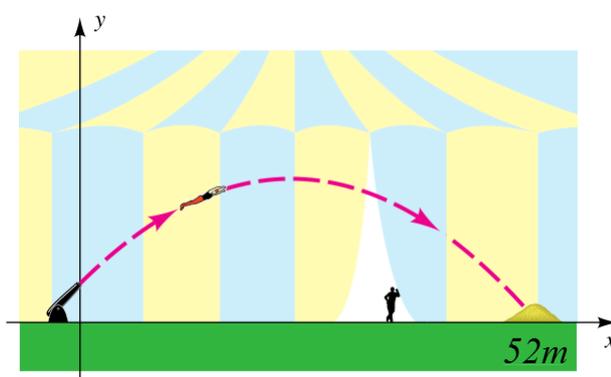
donde  $t$  es el tiempo de caída y  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .



- Calcular la altura a la que se encuentra el paracaidista al cabo de  $12 s$ .
- ¿Durante cuánto tiempo permanecerá en caída libre si la altura mínima para abrir un paracaidas desde esa altura, es de  $600 m$ ?
- Realiza un gráfico aproximado.

**Actividad 7 La bala de cañón humana** En la década de 1940, la exhibición de la bala de cañón humana fue ejecutada regularmente por *Emmanuel Zacchini* para el circo Ringling Brothers and Barnum Bailey. La punta del cañón se elevaba 5 metros del suelo y la distancia horizontal total recorrida era de 52 metros. Cuando el cañón se apuntaba a un ángulo de  $45^\circ$ , una ecuación del vuelo parabólico (vea la figura) tenía la forma  $y = ax^2 + x + c$ .

- Use la información dada para hallar una ecuación del vuelo.
- Encuentre la altura máxima alcanzada por la bala de cañón humana.



**Actividad 8 Trayectoria de una pelota de béisbol** suponga que una pelota de béisbol golpeada en el plato de *home* sigue una trayectoria que tiene la ecuación

$$y = -\frac{3}{4000}x^2 + \frac{3}{10}x + 3$$

donde  $x$  e  $y$  están en metros.

- Encuentre la altura máxima de la pelota de béisbol.
- ¿La pelota podrá librar una cerca de 8 m de alto que está a una distancia de 128 m del plato de *home*?

## Operaciones con funciones

**Actividad 9** Encuentre (a)  $(f + g)(x)$ ,  $(f - g)(x)$ ,  $(fg)(x)$ ,  $(f/g)(x)$ . (b) el dominio de  $f + g$ ,  $f - g$ , y  $fg$  (c) el dominio de  $f/g$ .

a)  $f(x) = x^2 + 2$     $g(x) = 2x^2 - 1$

d)  $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$     $g(x) = \sqrt{x + 3}$

b)  $f(x) = x^2 + x$     $g(x) = x^2 - 4$

e)  $f(x) = \frac{2x}{x - 4}$     $g(x) = \frac{x}{x + 5}$

c)  $f(x) = \sqrt{x + 5}$     $g(x) = \sqrt{x + 5}$

f)  $f(x) = \frac{x}{x - 2}$     $g(x) = \frac{7x}{x + 4}$

**Actividad 10** Encuentre (a)  $(f \circ g)(x)$  (b)  $(g \circ f)(x)$  (c)  $(f \circ f)(x)$  (d)  $(g \circ g)(x)$

a)  $f(x) = 2x - 5$     $g(x) = 3x + 4$

d)  $f(x) = 5x - 7$     $g(x) = 3x^2 - x + 2$

b)  $f(x) = 5x + 2$     $g(x) = 6x - 3$

e)  $f(x) = \sqrt{x - 15}$     $g(x) = x^2 + 2x$

c)  $f(x) = 3x^2 + 4$     $g(x) = 5x$

f)  $f(x) = \frac{1}{x - 1}$     $g(x) = x - 1$

# Guia 8: Funciones Polinómicas y Racionales

## Funciones Polinómicas y Racionales

**Actividad 1** Trace la gráfica de  $f$  para el valor indicado de  $c$  o  $a$ .

a)  $f(x) = x^2 + c$

(i)  $c = 3$

(ii)  $c = -3$

b)  $f(x) = -2x^3 + c$

(i)  $c = -2$

(ii)  $c = 2$

c)  $f(x) = ax^3 + 2$

(i)  $a = 2$

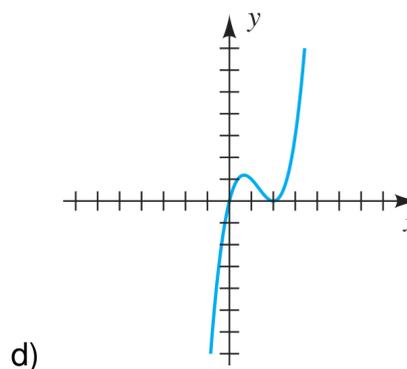
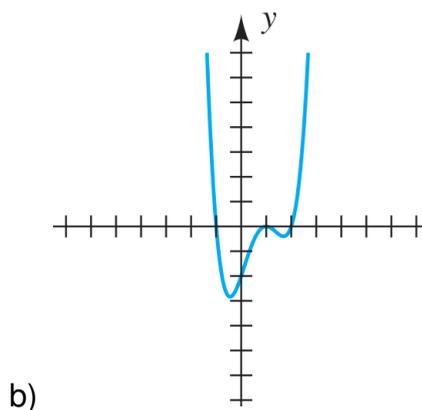
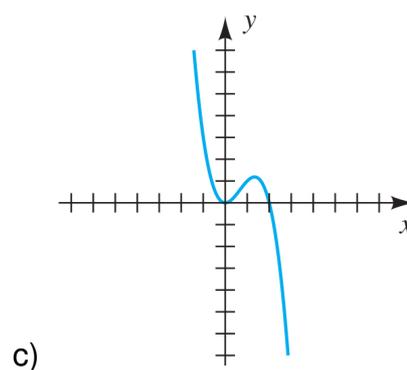
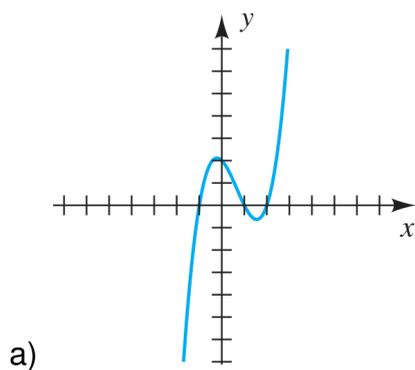
(ii)  $c = -\frac{1}{2}$

d)  $f(x) = ax^3 - 3$

(i)  $a = -2$

(ii)  $c = \frac{1}{8}$

**Actividad 2** Relacione cada gráfica con una ecuación.



- (A)  $f(x) = x(x - 2)^2$     (B)  $f(x) = -x^2(x - 2)$     (C)  $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$   
 (D)  $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2(x - 2)$

**Actividad 3** Encuentre todos los valores de  $x$  tales que  $f(x) > 0$  y toda  $x$  tal que  $f(x) < 0$ , y trace la gráfica de  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$

e)  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$

b)  $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 1$

f)  $f(x) = \frac{1}{6}(x+2)(x-3)(x-4)$

c)  $f(x) = x^4 - 4x^2$

g)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

d)  $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

h)  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

i)  $f(x) = x^2(x+2)(x-1)^2(x-2)$

**Actividad 4** Si  $f(x) = kx^3 + x^2 - kx - 5k$ , encuentre el número  $k$  tal que la  $f$  contenga el punto  $(-1, 4)$ .

**Actividad 5** Si un cero de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - kx + 12$  es  $-2$ , encuentre otros ceros.

**Actividad 6** Polinomio de Legendre El polinomio de tercer grado de Legendre

$$P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

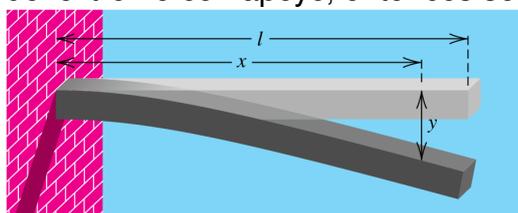
se presenta en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Encuentre todos los valores de  $x$  tales que  $P(x) > 0$  y toda  $x$  tal que  $P(x) < 0$ , y trace la gráfica de  $P$ .

**Actividad 7 Un polinomio de Chebyshev** El polinomio de cuarto grado de Chebyshev  $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$  se presenta en estudio de estadística. Encuentre todos los valores de  $x$  tales que  $f(x) > 0$ . (sugerencia: Sea  $z = x^2$  y use la fórmula cuadrática).

**Actividad 8** En pruebas hechas de una dieta experimental para gallinas, se determinó que el peso promedio en gramos  $w$  fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días  $d$  después que se inició la dieta. Donde  $0 \leq d \leq 50$ . suponer que el peso de una gallina al iniciar la dieta es de 40 gramos y 25 días después 625 gramos.

- Encuentre una función que relacione el peso  $w(d)$  y los días  $d$  de dieta.
- ¿ Cuántos debe pesar una gallina a los 50 días de dieta?

**Actividad 9 Flexión de una viga.** Una viga horizontal de  $l$  metros de largo está apoyada en un extremo y no apoyada en el otro extremo (vea la figura). Si la viga se somete a una carga uniforme y si  $f$  denota la flexión de la viga en una posición a  $x$  metros del extremo con apoyo, entonces se puede demostrar que



$$y = cx^2(x^2 - 4lx + 6l^2)$$

donde  $c$  es una constante positiva que depende del peso de la carga y de las propiedades físicas de la viga.

- Si la viga mide 10 metros de largo y la flexión en el extremo no apoyado de la viga es de 2 metros, encuentre  $c$ .
- Demuestre que la flexión es de 1 metro en algún punto entre  $x = 6,1$  y  $x = 6,2$ .

**Actividad 10** Use el teorema del residuo para hallar  $f(c)$ .

- $f(x) = 3x^3 - x^2 - 4$     $c = 2$
- $f(x) = 2x^3 - 3x - 1$     $c = 3$
- $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8$     $c = -3$
- $f(x) = x^4 + 3x^2 - 12$     $c = -2$

**Actividad 11** Encuentre un polinomio  $f(x)$  con coeficiente principal 1 y que tenga el grado y ceros dados.

- grado 3 ; ceros  $-3, 0, 5$ .
- grado 3 ; ceros  $\pm 2, 3$ .
- grado 3 ; ceros  $\pm 3, 1$ .
- grado 4 ; ceros  $-2, \pm 1, 4$ .

**Actividad 12** Use la división sintética para hallar  $f(c)$ .

- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$     $c = 3$
- $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x$     $c = -2$
- $f(x) = 0, 3x^3 + 0, 4x - 4x$     $c = 0, 2$
- $f(x) = x^2 + 3x - 5$     $c = 3$

**Actividad 13** Encuentre el residuo si el polinomio  $3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$  se divide entre  $x + 1$

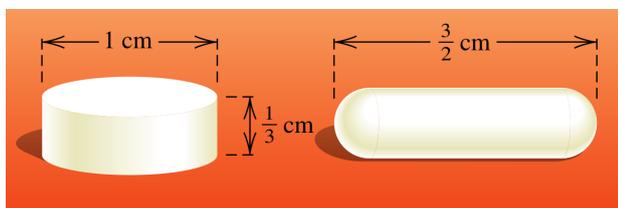
**Actividad 14** Use la gráfica de  $f$  para aproximar todos los valores de  $k$  tales que  $f(x)$  sea divisible entre el polinomio lineal dado.

- $f(x) = x^3 + k^3x^2 + 2kx - 2k^4$  ;    $x - 1, 6$
- $f(x) = k^5x^3 - 2, 1x^2 + k^3x - 1, 2k^2$  ;    $x + 0, 4$

**Actividad 15 Dimensiones de una cápsula.** Una pastilla de aspirina en forma de cilindro circular recto tiene altura de  $\frac{1}{3}$  de centímetro y radio de  $\frac{1}{2}$  centímetro. El fabricante también desea vender la aspirina en forma de cápsula. La cápsula debe medir  $\frac{3}{2}$  centímetros de largo, en forma de cilindro circular recto con semiesferas unidas en ambos extremos (vea la figura).

- Si  $r$  denota el radio de un hemisferio, encuentre una fórmula para el volumen de la cápsula.

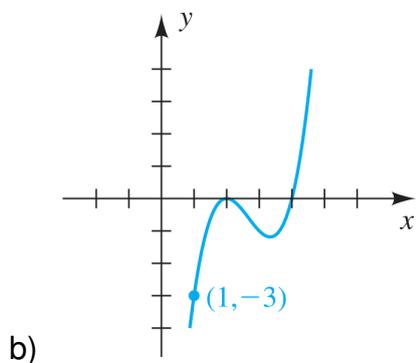
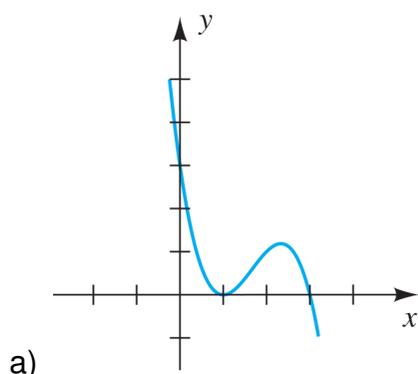
b) Encuentre el radio de la cápsula para que su volumen sea igual al de la pastilla.



**Actividad 16** Encuentre un polinomio  $f(x)$  de grado 3 que tenga ceros indicados y satisfaga la condición dada.

- a)  $-1, 2, 3$ ;  $f(-2) = 80$
- b)  $-5, 2, 4$ ;  $f(3) = -24$
- c)  $-i, i, 0$ ;  $f(2) = 30$
- d)  $-4i, 4i, 0$ ;  $f(4) = 1$

**Actividad 17** Encuentre una función polinómica de grado 3 cuya gráfica se adapte a la figura.



**Actividad 18** Encuentre los ceros de  $f(x)$  y exprese la multiplicidad de cada cero.

a)  $f(x) = x^2(3x + 2)(2x - 5)^3$

b)  $f(x) = x(x + 1)^4(3x - 7)^2$

c)  $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$

d)  $f(x) = (6x^2 + 7x - 5)^4(4x^2 - 1)^2$

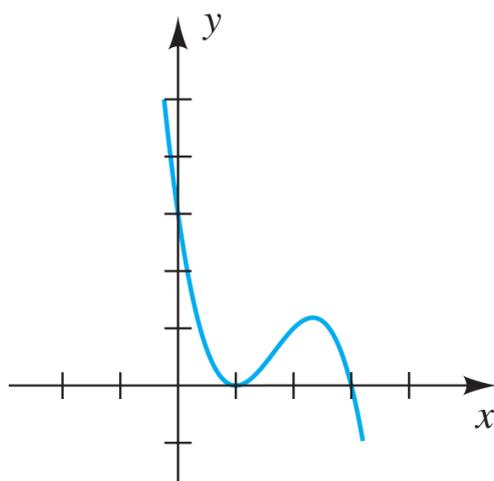
**Actividad 19** 🧩 Aplicando el primer teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios, determine los enteros mínimos y máximos que son cotas superiores e inferiores, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación. Con ayuda del geogebra, discuta la validez de los límites.

a)  $x^3 - 4x^2 - 5x + 7 = 0$

b)  $2x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$

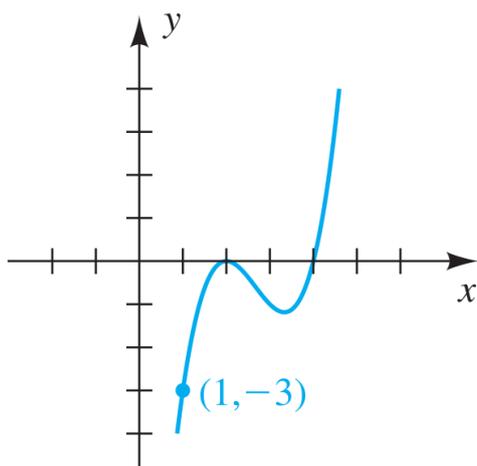
c)  $x^4 - 9x^3 - 8x - 10 = 0$

Use la grafica para completar las afirmaciones.



**Actividad 20**

- Cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow 3^-$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow 3^+$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .



**Actividad 21**

- Cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow -2^-$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow 2^+$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .

**Actividad 22** Trace la gráfica de  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{3}{x-4}$

b)  $f(x) = -\frac{-3x}{x+2}$

c)  $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

d)  $f(x) = \frac{(4x-1)(x-2)}{(2x+3)(x-2)}$

e)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}$

f)  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

g)  $f(x) = \frac{5x+3}{3x-7}$

h)  $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

i)  $f(x) = \frac{-2x^2+10x-12}{x^2+x}$

**Actividad 23** Encuentre una ecuación de función racional  $f$  que satisfaga las condiciones dadas.

- a)
  - Asintóta vertical:  $x = 5$
  - Asintóta horizontal:  $y = -1$
  - Intersección con eje  $x$ :  $2$
- b)
  - Asintótas verticales:  $x = -2$ ,  $x = 0$
  - Asintóta horizontal:  $y = 0$

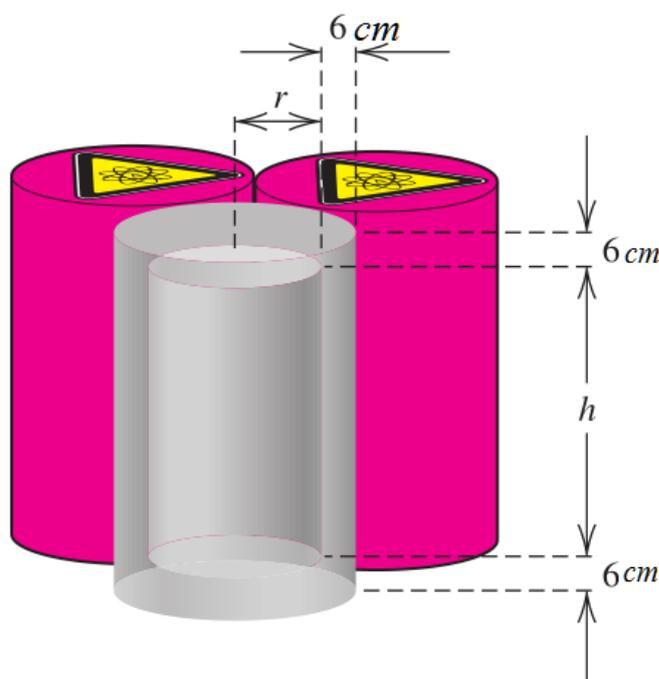
- Intersección con eje  $x$  :  $2$ ;  $f(3) = 1$
- c) ■ Asintotas verticales:  $x = -3$  ,  $x = 1$ 
  - Asintota horizontal:  $y = 0$
  - Intersección con eje  $x$  :  $-1$ ;  $f(0) = -2$
  - hueco en  $x = 2$
- d) ■ Asintotas verticales:  $x = -1$  ,  $x = 3$ 
  - Asintota horizontal:  $y = 2$
  - Intersección con eje  $x$  :  $-2$ ;  $1$
  - hueco en  $x = 0$

**Actividad 24 Un recipiente para desechos radiactivos** Un recipiente cilíndrico para almacenar desechos radiactivos se va a construir de plomo. Este recipiente debe tener paredes de  $6\text{ cm}$  de grueso. El volumen del cilindro exterior mostrado en la figura debe ser  $16\pi\text{ cm}^2$ .

- a) Exprese la altura  $h$  del interior del cilindro como función del radio interior  $r$ .
- b) Demuestre que el volumen interior  $V(r)$  está dado por

$$V(r) = \pi r^2 \left[ \frac{16}{(r + 0,5)^2} - 1 \right]$$

- c) ¿Qué valores de  $r$  deben excluirse en el inciso (b)?



**Actividad 25 Dosis de medicamento** La regla de *Young* es una fórmula que se usa para adaptar los niveles de dosis de medicamento de adultos para niños. Si  $a$  denota la dosis de adultos (en miligramos) y si  $t$  es la edad del niño (en años), entonces la dosis

$y$  para niño está dada por la ecuación  $y = \frac{ta}{t+12}$ . Trace la gráfica de esta ecuación para  $t > 0$  y  $a = 100$ .

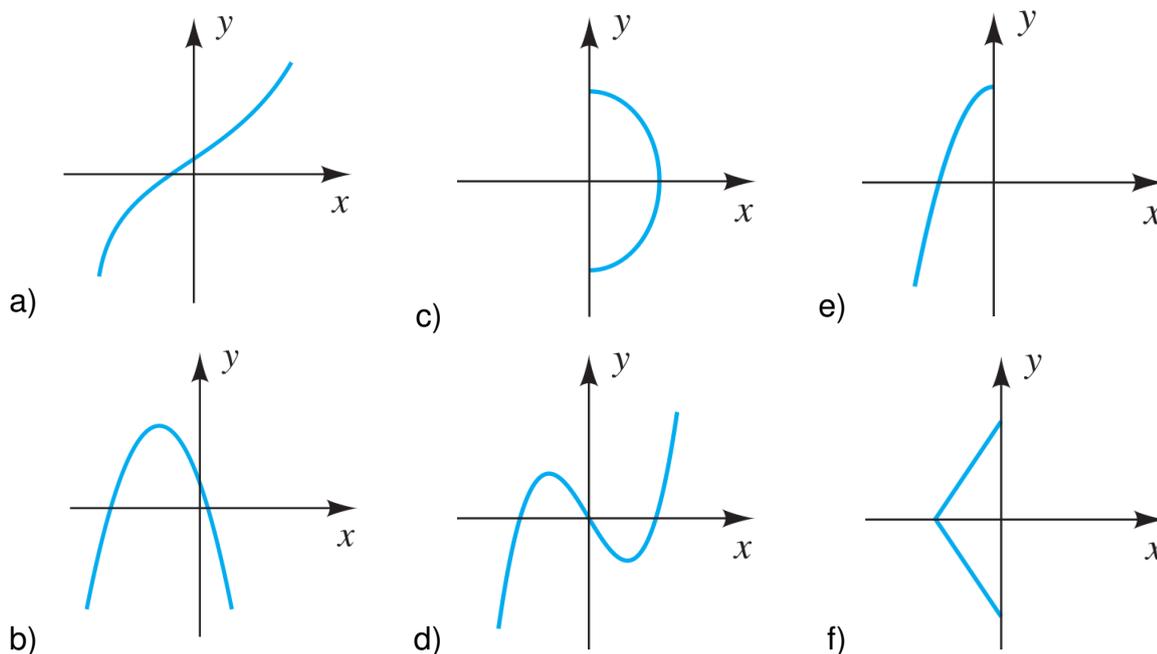
**Actividad 26 Concentración de sal** Agua salada de concentración  $0,1 \text{ kg}$  de sal por litros entra en un gran tanque que inicialmente contiene  $50$  litros de agua pura.

- Si el caudal de agua salada que entra al tanque es  $5 \text{ kg/min}$ , encuentre el volumen  $V(t)$  de agua y la cantidad  $A(t)$  de sal en el tanque después de  $t$  minutos.
- Encuentre una fórmula para la concentración de sal  $c(t)$  (en  $\text{kg/litros}$ ) después de  $t$  minutos.
- Discuta la variación de  $c(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

# Guia 9: Funciones Exponenciales y Logarítmicas

## Función Exponencial y Logarítmicas

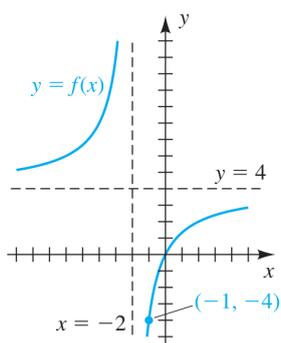
**Actividad 1** Determine si la gráfica corresponde a una función biunívoca.



**Actividad 2** Determine si la función es biunívoca.

- |                      |                            |
|----------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = 2x + 5$   | e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ |
| b) $f(x) = x^2 - 5$  | f) $f(x) = \frac{1}{x-2}$  |
| c) $f(x) = \sqrt{x}$ | g) $f(x) = 3$              |
| d) $f(x) =  x $      | h) $f(x) = \frac{1}{x^2}$  |

**Actividad 3** Use la gráfica de  $f$  junto con la relación dominio -rango de  $f$  y  $f^{-1}$  para completar las declaraciones. (Sugerencia: si  $x$  se aproxima a 2 en  $f$ , entonces  $y$  se aproxima a 2 en  $f^{-1}$ )

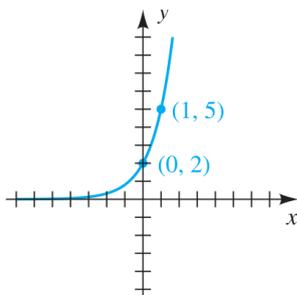


- Cuando  $x \rightarrow -4$ ,  $f^{-1}(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $f^{-1}(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f^{-1}(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow 4^+$ ,  $f^{-1}(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .
- Cuando  $x \rightarrow 4^-$ ,  $f^{-1}(x) \rightarrow \dots\dots\dots$ .

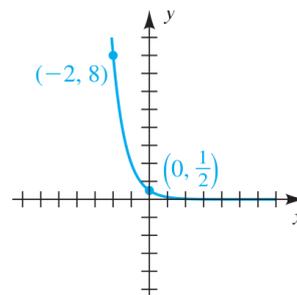
**Actividad 4** Trace la gráfica de  $f$  si  $a = 2$

- a)  $f(x) = a^x$
- b)  $f(x) = 3a^x$
- c)  $f(x) = a^x + 3$
- d)  $f(x) = a^x - 3$
- e)  $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- f)  $f(x) = a^{x+3}$

**Actividad 5** Encuentre una función exponencial  $f(x) = ba^x$  o  $f(x) = ba^x + c$  que tenga la gráfica dada.



a)



b)

**Actividad 6** Encuentre una función exponencial de la forma  $f(x) = ba^{-x} + c$  que tiene la asíntota horizontal y el punto de intersección con el eje  $y$  dados y que pasa por el punto  $P$ .

- a)  $y = 32$ ; punto de intersección con el eje  $y$  : 212;  $P(2, 112)$
- b)  $y = 72$ ; punto de intersección con el eje  $y$ : 425;  $P(1; 248, 5)$

**Actividad 7 Población de renos** Cien renos, cada uno de ellos de 1 año de edad, se introducen en una reserva de caza. El número  $N(t)$  de animales vivos después de  $t$  años se pronostica que es  $N(t) = 100(0, 9)^t$ .

- a) Estime el número de animales vivos después de 5 años.
- b) ¿Qué porcentaje de la manada muere cada año?

**Actividad 8 Dosis de medicamento** Un medicamento es eliminado del cuerpo por la orina. Suponga que para una dosis inicial de 10 miligramos, la cantidad  $A(t)$  en el cuerpo  $t$  horas después está dada por  $A(t) = 10(0, 8)^t$ .

- a) Estime la cantidad del medicamento en el cuerpo 8 horas después de la dosis inicial.
- b) ¿Qué porcentaje del medicamento remanente en el cuerpo es eliminado cada hora?

**Actividad 9 Crecimiento de bacterias** El número de bacterias en cierto cultivo aumentó de 600 a 1800 entre las 7 : 00 a.m. y las 9 : 00 a.m. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, el número  $f(t)$  de bacterias  $t$  horas después de las 7 : 00 a.m. está dado por  $f(t) = 600(3)^{t/2}$ .

- a) Estime el número de bacterias en el cultivo a las 8 : 00 a.m., 10 : 00 a.m. y 11 : 00 a.m.
- b) Trace la gráfica de  $f$  para  $0 \leq t \leq 4$ .

**Actividad 10** Trace la gráfica de  $f$  y use la fórmula de cambio de base para aproximar el punto de intersección con el eje  $y$ .

- a)  $f(x) = \log_2(x + 3)$
- b)  $f(x) = \log(x + 5)$

**Actividad 11** Los químicos emplean un número denotado por  $pH$  para describir cuantitativamente la acidez o basicidad de soluciones. Por definición,  $pH = -\log [H^+]$ , donde  $[H^+]$  es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro. proxime el  $pH$  de cada sustancia.

- a) vinagre:  $[H^+] \approx 6,3 \times 10^{-3}$
- b) zanahorias:  $[H^+] \approx 1,0 \times 10^{-5}$

c) agua de mar:  $[H^+] \approx 5,0 \times 10^{-9}$

**Actividad 12** Aproxime la concentración de ion Hidrógeno  $[H^+]$  de cada sustancia.

a) Manzana:  $pH \approx 3,0$

b) Cerveza:  $pH \approx 4,2$

c) Leche:  $pH \approx 6,6$

**Actividad 13**

- Encuentre el dominio y rango de la función.
- Encuentre la inversa de la función y su dominio y rango.

a)  $y = \log_2(x + 1)$

b)  $y = 2^{3-x} - 2$

# Guia 10: Parciales y Finales

## Parciales y Finales

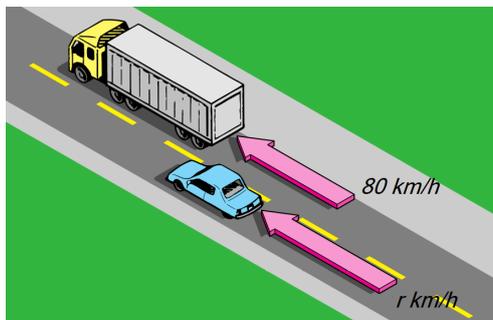
**Actividad 1** Resuelva:

a)  $\frac{5x}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{-6}{x^2 - 2x}$

b)  $\log x^2 = \log(-3x - 2)$

**Actividad 2** Resuelva y escriba el intervalo solución:  $x^2 - x - 6 < 0$

**Actividad 3 Velocidad de rebase** Un automóvil de 6 m de largo rebasa a un camión de 12 m de largo que corre a  $80 \text{ km/h}$  (vea la figura). ¿A qué velocidad constante debe correr el auto para pasar al camión en 5 segundos?



**Actividad 4** Resuelva:

a)  $\sqrt{1+3x} + \sqrt{6x+3} = \sqrt{-6x-1}$

b)  $2\log_a x - \frac{1}{3}\log_a(x-2) - 5\log_a(2x+3)$

**Actividad 5** Resuelva y escriba el intervalo solución:  $\frac{2}{|2x+3|} \geq 5$

**Actividad 6 Ley de Hooke** De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza  $F$  (en  $kg$ ) necesaria para estirar cierto resorte  $x$  centímetros más de su longitud natural está dada por  $F = (4,5)x$  (vea la figura). Si  $10 \leq F \leq 18$ , ¿cuáles son los valores correspondientes para  $x$ ?

**Actividad 7** Resuelva:

a)  $\frac{5x}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{-6}{x^2 - 2x}$

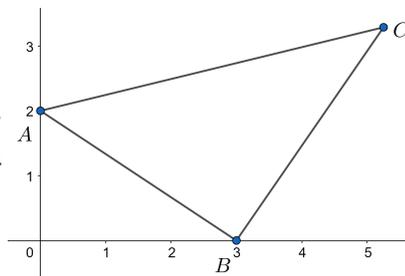
b)  $9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot (3^x)^{-2}$

**Actividad 8** Resuelva y escriba el intervalo solución:  $3|x+1| - 5 = -11$

**Actividad 9** El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Calcula los otros dos, sabiendo que los lados del triángulo forman una progresión aritmética.

**Actividad 10** 3 obreros trabajando 7 horas diarias construyen una casa en 40 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para construir 8 casas iguales en 60 días trabajando 8 horas diarias?.

**Actividad 11** Probar que  $\triangle ABC$  es rectángulo en  $B$  sabiendo que  $BC$  es un segmento de la recta  $2y - 3x + 9 = 0$ .

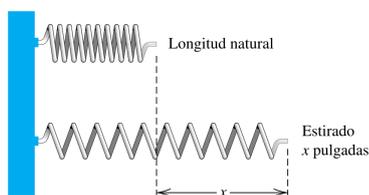


**Actividad 12** El ritmo cardíaco  $r$  (en latidos por minuto) de un gato es función lineal de su temperatura corporal  $t$  (en grados Celcius). En condiciones de laboratorio un gato con  $37^\circ C$  tiene un ritmo cardíaco de 200 pulsaciones por minuto, y de 150 si su temperatura es de  $32^\circ C$ .

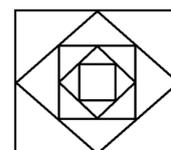
- Hallar la función que representa la situación.
- ¿Cuántas pulsaciones puede tener el gato si su temperatura corporal de de  $30^\circ C$ ?
- ¿A qué temperatura corporal su ritmo cardíaco es de 100 pulsaciones por minuto?

**Actividad 13** Sea  $f(x) = kx^3 - 5kx^2 - 2kx + 168$ , donde  $k$  es un número real tal que la  $f$  contenga el punto  $(1, 126)$ .

- Encuentre el número  $k$ .
- Encuentre las raíces.
- Grafique Aproximadamente.

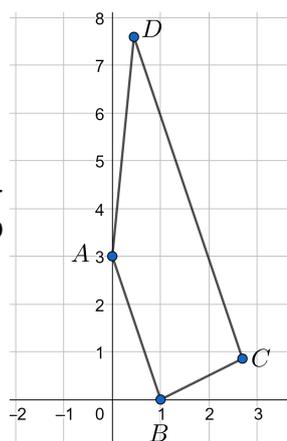


**Actividad 14** En un cuadrado de lado 2 se unen los puntos medios de sus lados para obtener otro cuadrado inscrito. Se repite el proceso sucesivamente con los cuadrados obtenidos. Calcular la sucesión cuyo término  $n$ -ésimo corresponde con la longitud del lado del cuadrado  $n$ -ésimo. ¿Qué tipo de sucesión es?



**Actividad 15** Un atleta entrenó 2 horas diarias durante 30 días y adelgazó 5 kilos. Si entrenara solamente 20 días, pero lo hiciera por 3 horas, ¿cuántos kilos perdería?

**Actividad 16** Probar que el cuadrilátero es un trapezio, sabiendo que  $CD$  es un segmento de recta  $y + 3x - 9 = 0$ .



**Actividad 17** Los biólogos han descubierto que el número de chirridos que los grillos de cierta especie emiten por minuto está relacionado con la temperatura. La relación es una función lineal. A  $60^\circ F$  los grillos chirrían 124 veces por minuto aproximadamente, mientras que a  $80^\circ F$ , lo hacen 172 veces por minuto.

- Obtener la función que relaciona el número de chirridos por minuto con la temperatura en Fahrenheit.
- Si la temperatura es de  $72^\circ F$  ¿Cuántas veces chirrían por minuto? ¿Y si es de  $83^\circ F$ ?
- ¿Cuál es la temperatura si se contaron 132 chirridos?

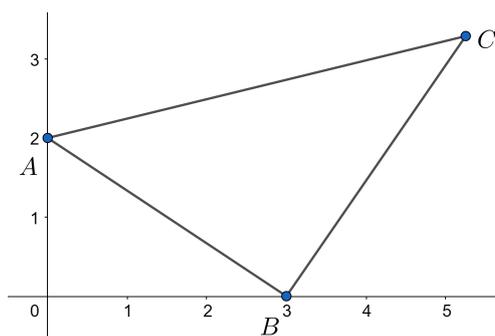
**Actividad 18** Sea  $f(x) = kx^3 + kx^2 - 16kx + 160$ , donde  $k$  es un número real tal que la  $f$  contenga el punto  $(1, 48)$ .

- Encuentre el número  $k$ .
- Encuentre las raíces.
- Grafique Aproximadamente.

**Actividad 19** Calcular cuántos números múltiplos de 3 hay entre 1977 y 2018 calcular su suma.

**Actividad 20** 5 sierras realizan 84 cortes trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántos cortes realizarán 12 sierras trabajando a 8 horas diarias?

**Actividad 21** Probar que  $ABCD$  es un trapezio.



**Actividad 22** Un ladrón huye a  $100 \text{ km/h}$  de un policía que viaja a  $120 \text{ km/h}$ . Si el ladrón le lleva  $2 \text{ km}$  de ventaja. Responde:

- Hallar la función que representa cada movimiento.
- ¿En cuánto tiempo el policía alcanza al ladrón?
- Realiza un gráfico.

**Actividad 23** Sea  $f(x) = \frac{kx + 3}{2x + 12}$ , donde  $k$  es un número real tal que la  $f$  contenga el punto  $(1, \frac{1}{2})$ .

- Encuentre el número  $k$ .
- Hallá las asíntotas y dominio.
- Grafique Aproximadamente.

**Actividad 24** Resuelva:

$$\frac{x + 2}{x - 1} + \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{11}{4}$$

**Actividad 25** De una piscina con  $4000 \text{ l}$  se extrae cada día la mitad del contenido. Por ejemplo, El 1er día se extrae  $2000 \text{ l}$ , el 2do día  $1000 \text{ l}$ , etc.

- Indique de que tipo de sucesión se trata y averigua el término general.
- ¿Cuántos litros se debe extraer el 5to día?
- ¿Cuántos días han pasado si en la piscina quedaron  $15,625 \text{ l}$ ?

**Actividad 26** En la construcción de la nueva autopista, 5 grúas realizan el trabajo de un tramo  $2 \text{ km}$  en 60 días, a un costo de alquiler de grúas de  $120 \text{ dólares}$  por día, ¿Cuánto le cuesta a la empresa 6 grúas al mismo precio un tramo de  $3 \text{ km}$  trabajando al mismo ritmo?

**Actividad 27** La presión  $P$  de un Buzo aumenta con la profundidad  $x$  en un tramo linealmente, a  $10 \text{ m}$  la presión es de  $1 \text{ atm}$  y a  $15 \text{ m}$  es de  $1,5 \text{ atm}$ .

- Construye un función  $P(x)$  que se ajuste al problema.
- Calcular la presión a  $12 \text{ m}$  de profundidad.
- Buceando con aire comprimido la máxima profundidad conocida es de  $60 \text{ m}$ . Calcular la presión a dicha profundidad.

**Actividad 28** Dada  $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - x - 6}$ :

- Hallar asíntotas.
- Dominio de  $f$ .
- Trace la gráfica de  $f$ .

**Actividad 29** Resuelva y escriba el intervalo solución:  $5x^2 + 50x - 50 \geq 5$

**Actividad 30** De un capital de 120 000\$ se extrae cada día la quinta partes del saldo actual. Por ejemplo, El 1er día se extrae 24 000 \$, el 2do día 4800 \$, etc.

- Indique de que tipo de sucesión se trata y averigua el término general.
- ¿Cuánto dinero queda al cabo del décimo día?
- ¿En cuántos días el saldo es de 49 152 \$ ?

**Actividad 31** 4 Bombas de agua extraen 120 litros en 1 minuto, ¿Cuántos litros extraen 6 bombas iguales en 1 hora de trabajo?.

**Actividad 32** Dada  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ :

- Hallar asintotas.
- Dominio de  $f$ .
- Trace la gráfica de  $f$ .

**Actividad 33** Encontrar el valor de  $n$  para que se cumpla la igualdad.

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 4094$$

**Actividad 34** En una fabrica de alimentos enlatados 12 operarios embalan 1800 cajas trabajando 8 horas diarias, luego de que la fabrica aumentó su producción. ¿Cuántos obreros habría que contratar de más para embalar 2400 cajas trabajando 9 horas diarias?

**Actividad 35** Dada  $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - x - 2}$ :

- Hallar asintotas.
- Dominio de  $f$ .
- Trace la gráfica de  $f$ .

**Actividad 36** Encontrar el valor de  $n$  para que se cumpla la igualdad.

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 4094$$

**Actividad 37** En una fabrica de alimentos enlatados 12 operarios embalan 1800 cajas trabajando 8 horas diarias, luego de que la fabrica aumentó su producción. ¿Cuántos obreros habría que contratar de más para embalar 2400 cajas trabajando 9 horas diarias?

**Actividad 38** Los productores panaderos regulan el precio del pan linealmente según el precio de la harina de molino. Mientras que la tonelada de harina costaba ( $T$ ) 120 dólares el precio por kilogramo de pan a la venta publico costaba ( $x$ ) \$ 35,808 , luego de un repentino aumento por la inflación, la tonelada pasó a costar 180 dólares y al público \$ 38,712.



- a) Construye un función  $T(x)$  que se ajuste al problema.
- b) Calcula el precio del pan si La tonelada cuesta 150 dólares.
- c) ¿Cuanto debería estar la tonelada, si el precio al público es de \$ 60?.

**Actividad 39** Dada  $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - x - 2}$ :

- a) Hallar asintotas.
- b) Dominio de  $f$ .
- c) Trace la gráfica de  $f$ .