Primer parcial
Tema 2
8/11/2018

Nombre y apellido:..

1. Demostrá que f es una transformación lineal.$f : \Re^3 \to \Re^2 / f(x, y, z) = (x - 3y, -x + 2z)$
Solución:

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ $v = (x_2, y_2, z_2)$

(i) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$f(u + v) = [x_1 + x_2 - 3(y_1 + y_2); -x_1 - x_2 + 2z_1 + 2z_2]$

$f(u + v) = (x_1 + x_2 - 3\,y_1 - 3\,y_2; -x_1 - x_2 + 2\,z_1 + 2\,z_2)$

$f(u + v) = (x_1 - 3y_1; -x_1 + 2\,z_1) + (x_2 - 3y_2; -x_2 + 2\,z_2)$

$f(u + v) = f(u) + f(v)$ cumple

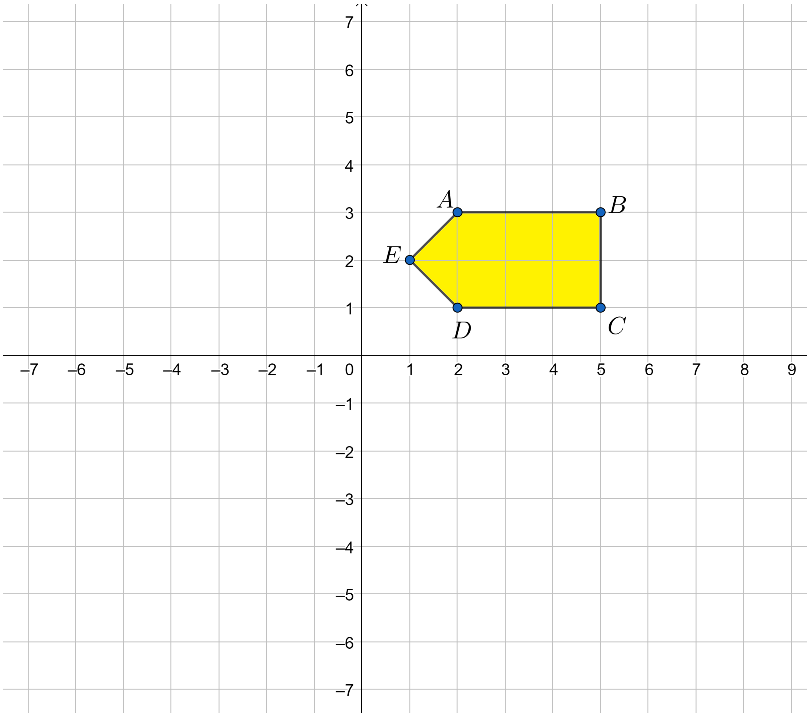
(ii) $f(\lambda\, u) = f(\lambda\,(x, y, z)) = f(\lambda\, x, \lambda\, y, \lambda\, z) = (\lambda\, x - 3\lambda\, y; -\lambda\, x + 2\lambda\, z) = \lambda\,(x - 3y; -x + 2z)$

$f(\lambda\, u) = \lambda\, f(u)$ cumple

$f(0, 0, 0) = (0, 0)$

2. Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de transformación que se ajuste a cada movimiento. Realiza el dibujo.

a) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.
b) Reflexión respecto al eje y.
c) Compresión $k = \frac{1}{2}$ respecto a los dos ejes.



Solución:

$$A_1 = A_{90^\circ} = \begin{pmatrix} cos\,90^\circ & -sen\,90^\circ \\ sen\,90^\circ & cos\,90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Reflexión: $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Compresión: $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Matriz de Composición: $A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

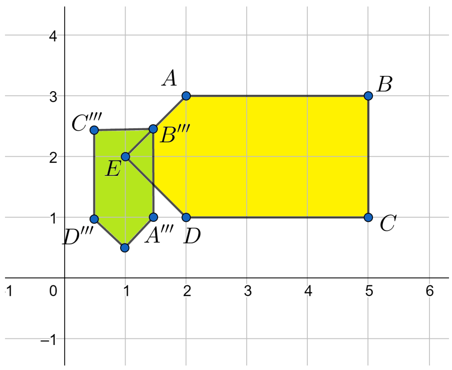
$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$C''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$D''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$



3. Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones: $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(1,2) = (-1,3)$, $f(0,1) = (-1,1)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.
Solución:
$(x,y) = \alpha\,(1,2) + \beta\,(0,1) = (\alpha, 2\alpha + \beta)$

Resolviendo el sistema obtenemos $\alpha = x \quad , \quad \beta = y - 2x$

$(x, y) = x\,(1, 2) + (y - 2x)\;(1, 0)$

Aplicamos Transformación lineal

$T(x, y) = x\,T(1, 2) + (y - 2x)\;T(1, 0)$

$T(x, y) = x\,(-1, 3) + (y - 2x)\;(-1, 1)$

$T(x, y) = (-x, 3x) + (-y + 2x+, y - 2x) = (x - y, x + y)$

$\boxed{T(x, y) = (x - y, x + y)}$

La función es única ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

4. Diagonalizar $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

Cálculo del polinómio característico y los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\,\lambda - 9 = -(\lambda + 1)\cdot(\lambda - 3)\cdot(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda_1 = -1 \quad m = 1$

$\lambda_2 = 3 \quad m = 2$

Autovectores propios.

$$H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Identificar las siguientes cónica mediante una rototraslación conveniente y graficar.

$$7x^2 - 6\sqrt{3}x\,y + 13y^2 - 16 = 0$$

Solución:

$$(x \quad y)\cdot\begin{pmatrix}7 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}7 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico $\begin{vmatrix}7-\lambda & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-20\lambda+60=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-4)(\lambda-16)=0$

$\lambda_1 = 4 \quad m=1$
$\lambda_2 = 16 \quad m=1$

Calculamos los autovectores:

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-4 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-16 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13-16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$H(\lambda_1)=\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}\right\} \quad , \quad H(\lambda_2)=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

los Ejes Nuevos están constituidos por: $\left\{v_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix} \Rightarrow \quad (x' \quad y')\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=16$$

$$4(x')^2+16(y')^2=16$$
$$\frac{(x')^2}{4}+(y')^2=1$$