



PRIMER PARCIAL
COMISIÓN TN
TEMA 1
6/7/2017

Nombre y apellido:..... D.N.I.....

Todas las respuestas deben estar justificadas. Un resultado aislado, no acompañado de explicación se considerará como problema no resuelto. Condición para la aprobación 4 puntos bien

1. a) Usando Algebra de Conjuntos probar que:

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

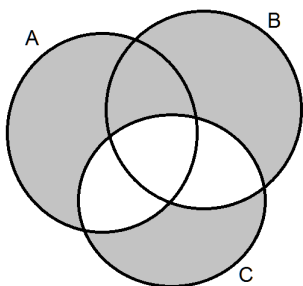
Solución:

$$A \cap (B \cap C)^c = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \text{ def. de diferencia.}$$

$$A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \text{ Morgan.}$$

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \text{ distributiva de intersección respecto a la unión.}$$

- b) Escribe en símbolos la zona sombreada.



Expresión simbólica:

$$(A \cup B \cup C) - (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2. Determine para que valores de $n \in \mathbb{Z}$ es verdadera la proposición $n + 4 | n^2 + 1$.

Solución:

$$(n^2 + 1) : (n + 4) = n - 4 + \frac{17}{n + 4}$$

luego $n + 4$ es un divisor de 17. o sea, $n = \{17, -17, 1, -1\}$.

n+4	17	-17	1	-1
n	13	-21	-3	-5



3. Prueba que para cualquier entero n la proposición es correcta.

$$3 + 7 + 11 + \cdots + 4n - 1 = n \cdot (2n + 1)$$

Solución:

1) $n = 1$

$$4 \cdot 1 - 1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) \\ 3 = 3$$

2) $n = k$

Hipótesis inductiva: $3 + 7 + 11 + \cdots + 4k - 1 + 4 \cdot k - 1 = k \cdot (2k + 1)$

3) $n = k + 1$. debemos probar que el segundo miembro se parezca a esto $(k + 1) \cdot [2(k + 1) + 1]$

Demotración:

$$3 + 7 + 11 + \cdots + 4k - 1 + 4 \cdot k - 1 + 4 \cdot (k + 1) - 1 = k \cdot (2k + 1) + 4 \cdot (k + 1) - 1$$

$$= k \cdot (2k + 1) + 1 + 4 \cdot (k + 1) = 2k^2 + 5k + 3$$

factorizando...

$$2k^2 + 5k + 3 = (k + 1) \cdot (2k + 3) = (k + 1) \cdot (2k + 2 + 1) = (k + 1) \cdot [2 \cdot (k + 1) + 1]$$

4. El dueño de una librería quiere comprar calculadoras científicas a \$ 180 y comunes a \$ 150, ¿Cuántas calculadoras de cada clase podrá comprar con \$ 4860?.

Solución:

Sea x la cant. de calculadoras científica e y la cant. de la calculadoras comunes.

$$180x + 150y = 4860$$

Simplificando por el máximo común $(180 : 150) = 30$

$$\frac{180}{30}x + \frac{150}{30}y = \frac{4860}{30}$$

$$6x + 5y = 162$$

Resolvemos usando el algoritmo de *Euclides*.

$$6 = 5 \cdot 1 + 1$$



$$1 = 6 - 5 \cdot 1$$

$$1 = 6 \cdot 1 + 5 \cdot (-1)$$

multiplicando por 162.

$$162 = 6 \cdot 162 + 5 \cdot (-162)$$

$$\begin{cases} x &= 162 + 5k \\ y &= -162 - 6k \end{cases}$$

como las variables deben ser positivas, entonces

$$\begin{cases} x &= 162 + 5k > 0 \\ y &= -162 - 6k > 0 \end{cases}$$

resolviendo se obtiene $k > -32,4$ y $k < -27$, entonces:

$$k = \{-32, -31, -30, -29, -28\}$$

las posibles soluciones son $(2, 30); (7, 24); (12, 18); (17, 12); (22, 6)$.

5. Hallar $(1717:1212)$ por el método de Euclides.

Solución:

$$1717 = 1212 \cdot 1 + 505$$

$$1212 = 505 \cdot 2 + 202$$

$$505 = 202 \cdot 2 + 101$$

$$202 = 101 \cdot 2 + 0$$

$$(1717 : 1212) = 101$$

6. Hallar el menor número x tal que $17x \equiv 18$ módulo 29.

Solución:

resolvemos la ecuación con clases residuales

$$\overline{17}x = \overline{18} \quad Z_{29}$$

$$\text{Como } \overline{17}^{-1} = \overline{12}$$



$$\overline{17} \cdot \overline{12}x = \overline{18} \cdot \overline{12} \quad Z_{29}$$

$$x = \overline{216}$$

Reduciendo $216 = 29 \cdot 7 + 13$ y como $29 \cdot 7 \equiv 0 \pmod{29}$

$$\text{Nos queda : } x = \overline{13} \quad Z_{29}$$

$$x = 29 \cdot t + 13$$

El menor número es cuando $t = 1$

$$x = 29 \cdot 1 + 13 = 42$$

$$\text{Rta: } \boxed{x = 42}$$

7. Hallar el mayor número de 5 cifras deja un residuo de 4 al dividirlo por 15, deja un residuo de 15 al dividirlo por 23 y no deja residuo al dividirlo por 11.

Solución:

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{15} \\ x \equiv 15 \pmod{23} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

de la segunda ecuación tenemos:

$$x = 23t_1 + 15$$

$$23t_1 + 15 \equiv 4 \pmod{15}$$

y como $15 \equiv 0 \pmod{15}$ Entonces

$$15t_1 + 8t_1 \equiv 4 \pmod{15}$$

y como $15t_1 \equiv 0 \pmod{15}$

Nos queda

$$8t_1 \equiv 4 \pmod{15}$$

dividimos por 4

$$2t_1 \equiv 1 \pmod{15}$$

$$\overline{2}t_1 = \overline{1} \quad Z_{15}$$



y sabemos que $\bar{2}^{-1} = \bar{8}$

$$t_1 = \bar{8} \quad Z_{15}$$

Luego $t_1 = 15t_2 + 8$

Reemplazo t_1 en x .

$$x = 23 \cdot (15t_2 + 8) + 15 = 345t_2 + 184 + 15 = 345t_2 + 199$$

$$\boxed{x = 345t_2 + 199}$$

luego $x \equiv 0 \pmod{11}$ entonces $345t_2 + 199 \equiv 0 \pmod{11}$

luego reducimos $198 = 18 \cdot 11 + 0$

$$345 = 11 \cdot 31 + 4$$

nos queda

$$4t_2 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$4t_2 \equiv -1 \pmod{11}$$

sumamos 11 m.a.m

$$4t_2 + 11 \equiv -1 + 11 \pmod{11}$$

$$4t_2 \equiv 10 \pmod{11}$$

dividimos por 2 m.a.m

$$2t_2 \equiv 5 \pmod{11}$$

y como $\bar{2}^{-1} = \bar{6}$

$$\bar{6} \cdot \bar{2} \cdot t_2 = \bar{5} \cdot \bar{6} \quad Z_{11}$$

$$t_2 = 30$$

Reduciendo $30 = 2 \cdot 11 + 8$ y como $2 \cdot 11 \equiv 0 \pmod{11}$

$$t_2 = 8 \pmod{11}$$

Luego $t_2 = 11k + 8$ y reemplazo en x nuevamente.

$$x = 345 \cdot (11k + 8) + 199 = 3795k + 2760 + 199$$



$$x = 3795k + 2959$$

ok ahora sabemos la pinta que tiene el número y que $x < 99999$

por lo tanto $3795k + 2959 < 99999$

Entonces $k < 25,57$ y el número debe ser $k = 25$

$$x = 3795 \cdot 25 + 2959 = 97834$$