

Razones y proporciones

Razones y proporciones aritméticas

- Una **razón** (r) es el cociente entre dos números reales: $r = \frac{a}{b} \wedge a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\frac{4,8}{3} = 1,6$$

$$\frac{-\frac{3}{10}}{0,2} = -1,5$$

$$\frac{0,6}{-\frac{1}{2}} = -1,2$$

$$\frac{-\frac{2}{5}}{-1,6} = 0,25$$

- Una **proporción** es una igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Ordinaria: los cuatro números son distintos y se denominan **extremos**.

Continua: dos de sus extremos son iguales y se denominan **medios**.

$$\frac{0,5}{20} = \frac{0,2}{8} \Leftrightarrow \underbrace{0,5 \cdot 8}_4 = \underbrace{20 \cdot 0,2}_4$$

$$\frac{0,6}{0,9} = \frac{0,4}{0,6} \Leftrightarrow \underbrace{0,6 \cdot 0,6}_{0,36} = \underbrace{0,9 \cdot 0,4}_{0,36}$$

- Desigualdad** entre dos razones: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$ $\wedge$ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c$

$$\frac{1,5}{4} < \frac{1,2}{3} \Leftrightarrow \underbrace{1,5 \cdot 3}_{4,5} < \underbrace{4 \cdot 1,2}_{4,8}$$

$$\frac{2}{2,5} > \frac{0,4}{0,7} \Leftrightarrow \underbrace{2 \cdot 0,7}_{1,4} > \underbrace{2,5 \cdot 0,4}_1$$

EJEMPLO 1: CALCULA LA RAZÓN ENTRE 1,5 y $\frac{3}{8}$.

$$\frac{1,5}{\frac{3}{8}} = 4$$

↑
SE REALIZA LA DIVISIÓN

EJEMPLO 2: CÁLCULA EL ELEMENTO FALTANTE

$$\frac{8}{4} = \frac{\square}{5}$$

COMO LA RAZÓN $\frac{8}{4} = 2$, ENTONCES
EL ELEMENTO FALTANTE
DEBE SER 10. YA QUE $\frac{10}{5} = 2$

10

LUEGO $\frac{8}{4} = \frac{\boxed{10}}{5}$

EJEMPLO 3: COLOCA $>$, $<$ ó $=$ SEGÚN CORRESPONDA.

a) $\frac{0,8}{2} \square \frac{0,7}{0,5}$

b) $\frac{0,6}{2} \square \frac{3}{10}$

SOLUCIÓN:

a) PRIMERO CALCULAMOS LA RAZÓN $\frac{0,8}{2} = 0,4$;

$\frac{0,7}{0,5} = 1,4$; LUEGO $1,4 > 0,4$ ó $0,4 < 1,4$

$\frac{0,8}{2} \square \frac{0,7}{0,5}$

b) $\frac{0,6}{2} = 0,3$; $\frac{3}{10} = 0,3$; LUEGO

$\frac{0,6}{2} \square \frac{3}{10}$

2

EJEMPLO 4: ESCRIBÍ UNA PROPORCIÓN CON LOS NÚMEROS QUE SE INDICAN EN CADA CASO.

a) $0,6$; 5 ; $2,4$ y $\frac{8}{25}$ ORDINARIA.

$$\frac{0,6}{\frac{8}{25}} = 2,08\bar{3} \quad ; \quad \frac{5}{2,4} = 2,08\bar{3}$$

$$\frac{0,6}{\frac{8}{25}} = \frac{5}{2,4}$$

b) $\frac{2}{5}$; $1,6$ y $0,8$ CONTINUA

PODEMOS ESCRIBIR ASÍ

$$\frac{0,8}{\frac{2}{5}} = 2 \quad ; \quad \frac{1,6}{0,8} = 2 \Rightarrow \frac{\textcircled{0,8}}{\frac{2}{5}} = \frac{1,6}{\textcircled{0,8}}$$

EJEMPLO 5: HALLE EL VALOR DE "X" EN CADA RAZÓN

a) $\frac{X+2}{8} = \frac{6}{5}$

b) $\frac{2X+5}{X-3} = \frac{5}{3}$

$$a) \frac{x+2}{8} = \frac{6}{5} \iff 5 \cdot (x+2) = 8 \cdot 6$$

↑
APLICÓ LA REGLA
DE LA PROPORCIÓN

$$5x + 10 = 48$$

$$5x = 48 - 10$$

$$\boxed{x = \frac{38}{5}}$$

VERIFICAMOS

$$\frac{\frac{38}{5} + 2}{8} = \frac{\frac{48}{5}}{8} = \frac{6}{5}$$

$$b) \frac{2x+5}{x-3} = \frac{5}{3} \iff 3 \cdot (2x+5) = 5 \cdot (x-3)$$

$$6x + 15 = 5x - 15$$

$$6x - 5x = -15 - 15$$

$$\boxed{x = -30}$$

LUEGO VERIFICAMOS

$$\frac{2 \cdot (-30) + 5}{-30 - 3} = \frac{5}{3} ; \frac{-55}{-33} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3} \text{ VERIFICA!}$$

4

Extremos y medios

- Para calcular un **extremo** desconocido, se despeja de la definición de proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{d}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{5} \Rightarrow x = 4,8 \quad \frac{9}{x+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow x+1 = \frac{9 \cdot 4}{3} \Rightarrow x+1 = 12 \Rightarrow x = 11$$

- Para calcular los **medios**, se aplican propiedades de la radicación.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot a = b \cdot c \Rightarrow a^2 = b \cdot c \Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b \cdot c} \Rightarrow |a| = \sqrt{b \cdot c}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{18}{x} \Rightarrow x^2 = 8 \cdot 18 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow |x| = \sqrt{144} \Rightarrow x = \pm 12$$

$$\frac{2}{x-2} = \frac{x-2}{32} \Rightarrow (x-2)^2 = 2 \cdot 32 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{64} \Rightarrow |x-2| = 8 \Rightarrow x = 10 \vee x = -6$$

Ejemplo 6: CALCULA CADA EXTREMO

$$\frac{a}{12} = -\frac{15}{20} \rightarrow a \cdot 20 = 12 \cdot (-15)$$

$$a = -180 : 20$$

$$\boxed{a = -9}$$

Ejemplo 7: CALCULA CADA MEDIO

$$\frac{m}{6} = \frac{24}{m} \rightarrow m^2 = 6 \cdot 24 \rightarrow \sqrt{m^2} = \sqrt{144}$$

$$|m| = 12$$

$$\boxed{m = 12} \vee \boxed{m = -12}$$

Propiedades de las proporciones

Las proporciones tienen propiedades que permiten resolverlas de diferentes maneras.

■ Propiedad 1

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2+3}{3} = \frac{4+6}{6} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2-3}{3} = \frac{4-6}{6} \Rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{-2}{6}$$

■ Propiedad 2

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2+3}{2} = \frac{4+6}{4} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2-3}{2} = \frac{4-6}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{-2}{4}$$

■ Propiedad 3

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} \Rightarrow \frac{4+5}{4-5} = \frac{8+10}{8-10} \Rightarrow \frac{9}{-1} = \frac{18}{-2}$$

■ Propiedad 4

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{2+3+5+7}{4+6+10+14} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 8: CALCULA m y n APLICANDO PROPIEDADES

$$m + m = 21 \quad \wedge \quad \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$$

Solución:

APLICAMOS LAS PROPIEDADES. Y NOS QUEDA

$$\frac{m}{n} = \frac{\overbrace{m+m}^{21}}{n} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{21}{n} = \frac{3}{4}$$

APLICAMOS LA LEY DE LA PROPORCIÓN

$$21 \cdot 4 = 3 \cdot n \rightarrow n = \frac{21 \cdot 4}{3} = 28$$

$$\boxed{n = 28}$$

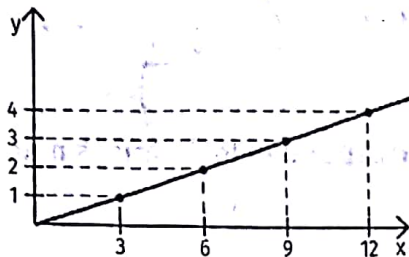
$$m = 21 - 28 = \boxed{-7}$$

$$\boxed{6}$$

Proporcionalidad directa e inversa

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** (DP) cuando su **cociente** es una constante k .

x	y
3	1
6	2
9	3
12	4

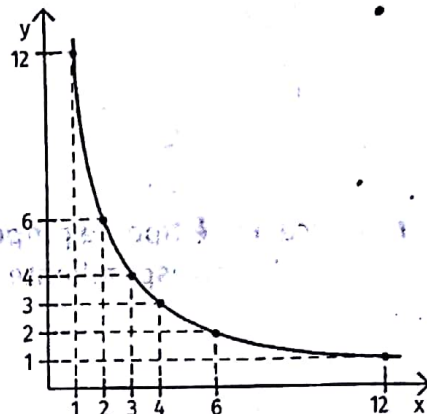


$$k = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot k$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$$

- Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** (IP) cuando su **producto** es una constante k .

x	y
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1



$$x \cdot y = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$$

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$$

EJEMPLO 8

Completá las tablas, hallá la constante y la fórmula de proporcionalidad.

a. DP

x	y
0,6	0,4
8	
	0,9
0,45	
	1,2

$$k = \boxed{}$$

$$y = $$

b. IP

x	y
2	0,3
0,5	
	6
1,5	
	2,6

$$k = \boxed{}$$

$$y = $$

a) COMO ES DP: LA CONSTANTE LA SACAMOS

$$k = \frac{y}{x} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{3}{5}}; \text{ LUEGO } \boxed{y = \frac{3}{5}x}$$

x	y
0,6	0,4
8	$(\frac{24}{5})$
(15)	0,9
0,45	$(0,27)$
(2)	1,2
$k = \frac{3}{5}$	

$$\boxed{x = \frac{5}{3}y}$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot 8 = (\frac{24}{5})$$

$$x = \frac{5}{3} \cdot 0,9 = (15)$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot 0,45 = (0,27)$$

$$x = \frac{5}{3} \cdot 1,2 = (2)$$

b) COMO ES IP: LA CONSTANTE LA SACAMOS

$$k = x \cdot y = 2 \cdot 0,3 = \boxed{0,6} \quad y = \frac{k}{x} \rightarrow y = \frac{0,6}{x}$$

x	y
2	0,3
0,5	$(\frac{6}{5})$
$(0,1)$	6
1,5	$(0,4)$
$(\frac{1}{4})$	2,4

$$x = \frac{0,6}{y}$$

$$y = \frac{0,6}{0,5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

8

$$X = \frac{0,6}{6} = 0,1 \quad ; \quad y = \frac{0,6}{1,5} = 0,4$$

$$X = \frac{0,6}{2,6} = \frac{6/9}{24/9} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

EJEMPLO 9: UNA BOTELLA DE 2500 ml CONTIENE 60 gr DE CLORO. ¿CUÁNTOS GRAMOS DE CLORO CONTIENE UN BIDÓN DE 5 1/2 l DE LA MISMA CONCENTRACIÓN?

V	gr(cloro)
2500	60
5500	x

+ (curved arrow from 2500 to 5500) + (curved arrow from 60 to x)

AMBAS MAGNITUDES AUMENTA, POR LO TANTO, ES "DP".

$$\text{LUEGO: } k = \frac{y}{x} = \frac{60}{2500} = 0,024$$

$$y = 0,024 \cdot 5500$$

$$\boxed{y = 132 \text{ gr}}$$

132 gr DE CLORO.

9

EJEMPLO 10: PARA LLENAR UNA PISCINA CON 6 GRIFOS SE NECESITAN 18 HORAS. ¿CUÁNTAS HORAS SE NECESITAN PARA LLENARLA CON 4 GRIFOS?

GRIFOS	HORAS
6	18
4	y

COMO UNA MAGNITUD DISMINUYE Y OTRA AUMENTA. ES "IP."

WEGO LA CONSTANTE $k = 6 \cdot 18$
 $k = 108$

$$x \cdot y = 108 \rightarrow 4 \cdot y = 108$$

$$y = 108 : 4$$

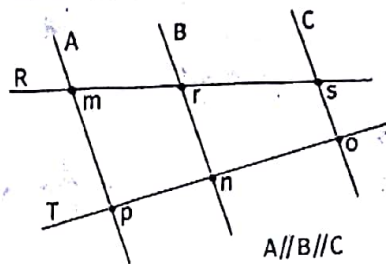
$$y = 27$$

SE NECESITAN 27 HORAS PARA LLENARLA EN 4 HORAS.

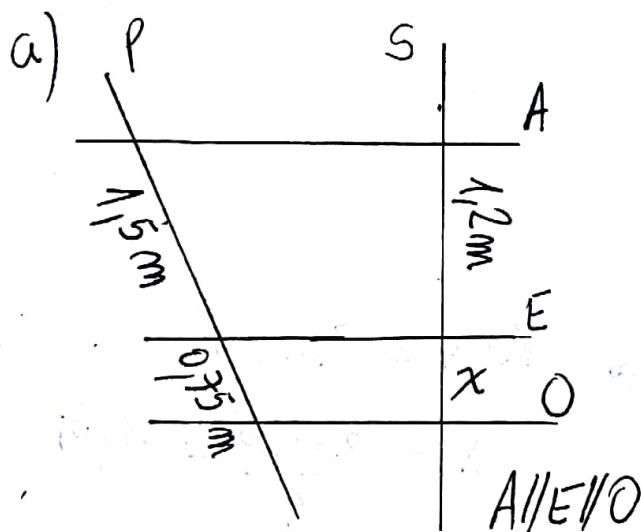
Teorema de Thales

Si tres o más paralelas (A, B y C) son cortadas por dos transversales (R y T), la razón entre dos segmentos determinados en una de ellas es igual a la razón de los segmentos determinados en la otra por las mismas paralelas.

$$\frac{mr}{rs} = \frac{pn}{no} \wedge \frac{ms}{rs} = \frac{po}{no} \wedge \frac{ms}{mr} = \frac{po}{pn}$$



EJEMPLO 11: CALCULA LA LONGITUD DEL SEGMENTO X.



SOLUCIÓN: APLICAMOS LA PROPORCIÓN ENTRE LOS SEGMENTOS CORRESPONDIENTE.

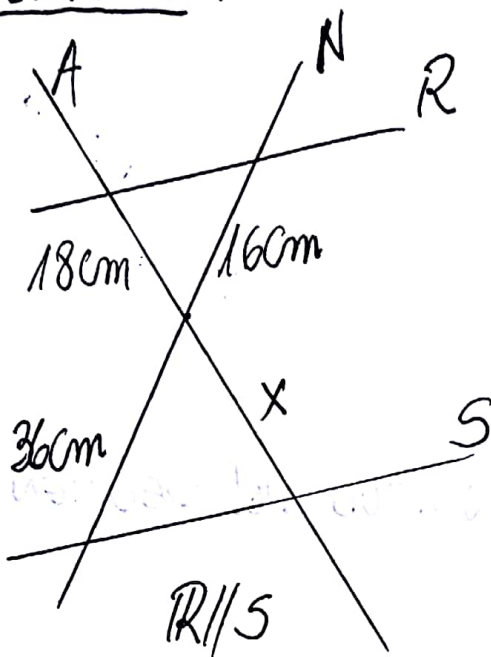
$$\frac{1,5 \text{ m}}{0,75 \text{ m}} = \frac{1,2 \text{ m}}{x} \rightarrow 1,5 \cdot x = 0,75 \cdot 1,2$$

$$x = 0,6 \text{ m}$$

{ RAZÓN DE SEGMENTOS }
{ SOBRE P }

{ RAZÓN DE SEGMENTOS }
{ SOBRE S }

b) EJEMPLO 12:



← LAS RECTAS
PUEDEN ESTAR
CRUZADAS

Solución:

$$\frac{18}{X} = \frac{16}{36}$$

$$\rightarrow 16X = 36 \cdot 18$$

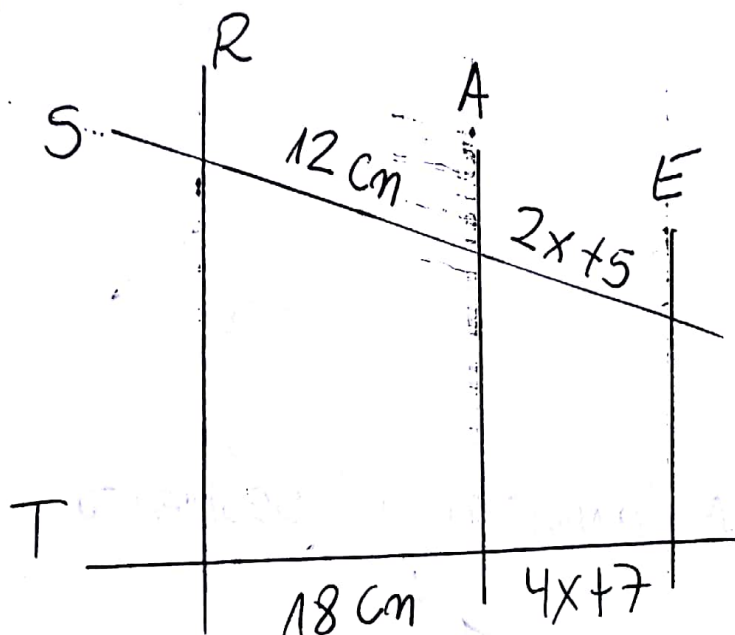
$$X = \frac{36 \cdot 18}{16} = 40,5$$

$$X = 40,5 \text{ cm}$$

RAZÓN DE SEGMENTOS
SOBRE A

RAZÓN DE SEGMENTOS
SOBRE N

EJEMPLO 13:



Solución:

$$\frac{12}{2x+5} = \frac{18}{4x+7} \rightarrow 12 \cdot (4x+7) = 18 \cdot (2x+5)$$

$$48x + 84 = 36x + 90$$

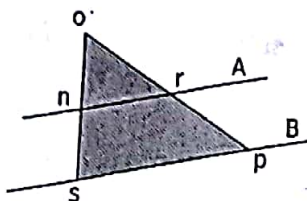
$$48x - 36x = 90 - 84$$

$$12x = 6$$

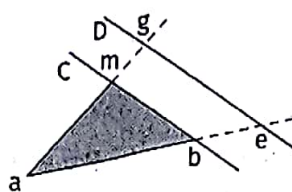
$$\boxed{x = 0,5}$$

Consecuencias del teorema

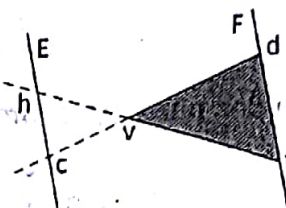
Toda recta paralela a cualquier lado de un triángulo determina sobre las rectas que contienen a los otros dos lados segmentos proporcionales a ellos.



$$A \parallel B \Rightarrow \frac{\overline{op}}{\overline{or}} = \frac{\overline{os}}{\overline{on}}$$



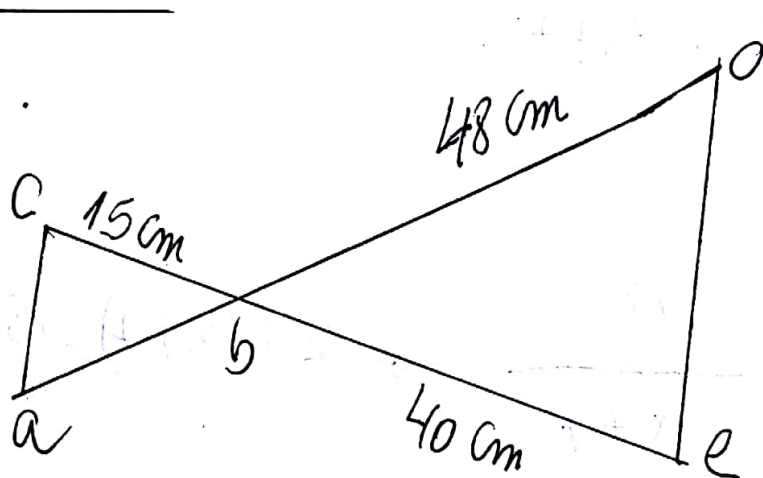
$$C \parallel D \Rightarrow \frac{\overline{am}}{\overline{ag}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ae}}$$



$$E \parallel F \Rightarrow \frac{\overline{dv}}{\overline{vc}} = \frac{\overline{tv}}{\overline{vh}}$$

EJEMPLO 14: CALCULÁ LA LONGITUD DEL SEGMENTO

$\overline{ab}$.



$\overline{ac} \parallel \overline{de}$

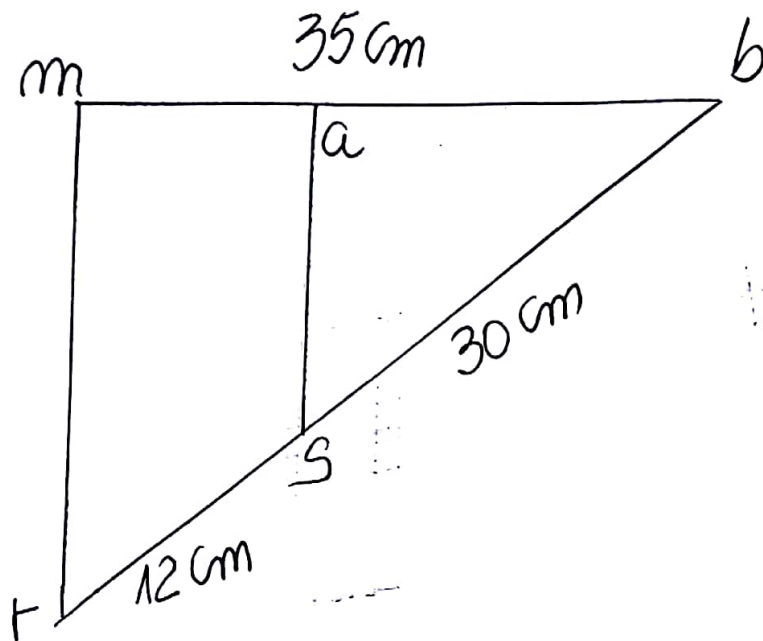
Solución:

$$\frac{\overline{ab}}{48} = \frac{15}{40} \rightarrow 40 \overline{ab} = 48 \cdot 15$$

$$\overline{ab} = \frac{48 \cdot 15}{40} = 180 \text{ cm}$$

$$\boxed{\overline{ab} = 180 \text{ cm}}$$

EJEMPLO 15: CALCULA LA LONGITUD DEL SEGMENTO $\overline{ab}$.



Solución:

$$\frac{\overline{ab}}{mb} = \frac{30}{12+30}$$

$$; \frac{\overline{ab}}{mb} = \frac{30}{42} ; \frac{\overline{ab}}{35} = \frac{30}{42}$$

$$42 \cdot \overline{ab} = 35 \cdot 30$$

$$\overline{ab} = \frac{35 \cdot 30}{42} = 25$$

$$\boxed{\overline{ab} = 25\text{ cm}}$$