Primer Parcial
Comisión TN
Tema 2
6/7/2017

Nombre y apellido:.. D.N.I..................................

Todas las respuestas deben estar justificadas. Un resultado aislado, no acompañado de explicación se considerará como problema no resuelto.

1. a) Usando Algebra de Conjuntos probar que:

$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$$

Solución:

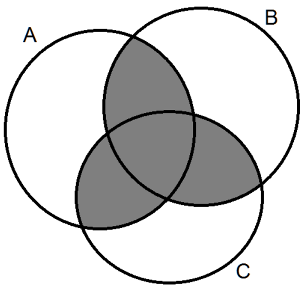
$A \cup (B \cap C^c) = (A \cup B) \cap (C \cap A^c)^c$ Def. de diferencia.

$A \cup (B \cap C^c) = (A \cup B) \cap (C^c \cup A)$ Morgan.

$(A \cup B) \cap (A \cup C^c) = (A \cup B) \cap (C^c \cup A)$ distributica de la unión respecto de la intersección.

$(A \cup B) \cup (A \cup C^c) = (A \cup B) \cap (A \cup C^c)$. Conmutatica de la unión.

b) Escribe en símbolos la zona sombreada.



Expresión símbolica:
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)$

2. Determine para que valores de $n \in Z$ es verdadera la proposición $n - 5 | 4n + 1$.

Solución:

$$(4n + 1) : (n - 5) = 4 + \frac{21}{n - 5}$$

luego $n - 5$ es un divisor de 21. o sea, $n = \{21, -21, 7, -7, 3, -3, -1, 1\}$.

n-5	21	-21	7	-7	3	-3	-1	1
n	26	-16	12	-2	8	2	4	6

3. Prueba que para cualquier entero n la proposición es correcta.

$$5 + 9 + 13 + \cdots + 4n + 1 = n \cdot (2n + 3)$$

Solución:

1) $n = 1$

$4 \cdot 1 + 1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 3)$
$5 = 5$

2) $n = k$

Hipótesis inductiva: $5 + 9 + 13 + \cdots + 4k + 1 = k \cdot (2k + 3)$

3) $n = k + 1$. debemos probar que el segundo miembro se parezca a $(k + 1) \cdot [2(k + 1) + 3]$

Demotración:

$$5 + 9 + 13 + \cdots + 4k + 1 + 4 \cdot (k + 1) + 1 = k \cdot (2k + 3) + 4 \cdot (k + 1) + 1$$

$$= k \cdot (2k + 3) + 4 \cdot (k + 1) + 1 = 2k^2 + 7k + 5$$

factorizando...

$$2k^2 + 5k + 3 = (k + 1) \cdot (2k + 3) = (k + 1) \cdot (2k + 5) = (k + 1) \cdot [2 \cdot (k + 1) + 3]$$

4. El dueño de una librería quiere comprar resmas de hojas a \$ 100 las oficio y \$ 96 las A4, ¿Cuántas resmas de cada clase podrá comprar si desea invertir \$ 3536?.
Solución:
Sea x la cant. de resmas oficio e y la cant. de resmas A4.

$$100x + 96y = 3536$$

Simplificando por el máximo común $(100 : 96) = 4$

$$\frac{100}{4}x + \frac{96}{4}y = \frac{3536}{4}$$

$$25x + 24y = 884$$

Resolvemos usando el algorítmo de *Euclides.*

$25 = 24 \cdot 1 + 1$

$1 = 25 \cdot 1 + 24 \cdot (-1)$

multiplicando por 884.

$884 = 25 \cdot 884 + 5 \cdot (-884)$

$$\begin{cases} x &= 884 + 96k \\ y &= -884 - 100k \end{cases}$$

como las variables deben ser positivas, entonces

$$\begin{cases} x &= 884 + 96k > 0 \\ y &= -884 - 100k > 0 \end{cases}$$

resolviendo se obtiene $k > -9,2$ y $k < -8,84$, entonces:

$$k = \{-9\}$$

la única solución es $(20, 16)$ o sea, 20 resmas oficio y 16 resmas A4.

5. Hallar (906:1963) por el método de Euclides.
Solución:

$$1963 = 906 \cdot 2 + 151$$

$$906 = 151 \cdot 6 + 0$$

Entonces: $(906 : 1963) = \boxed{151}$

6. Hallar el menor número x tal que $14x \equiv 11$ módulo 31.
Solución:

resolvemos la ecuación con clases residuales

$\overline{14}x = \overline{11}$ $\qquad Z_{31}$

Como $\overline{14}^{-1} = \overline{20}$

$\overline{20} \cdot \overline{14}x = \overline{20} \cdot \overline{31}$ $\qquad Z_{31}$

$x = \overline{220}$ $\qquad Z_{31}$

reduciendo $220 = 217 + 3$ y como $217 \equiv 0 (\mod 31)$

$x = \overline{3}(\mod 31)$

Luego

$x = 31 \cdot t + 3$

El menor número es cuando $t = 1$

$x = 31 \cdot 1 + 3 = 34$

Rta: $\boxed{\mathrm{x} = 34}$

7. Hallar el mayor número de 5 cifras deja un residuo de 4 al dividirlo po 14 , deja un residuo de 1 al dividirlo por 19 y no deja residuo al dividiro por 13.

Solución:

$$\begin{cases} x & \equiv & 4(\mod 14) \\ x & \equiv & 1(\mod 19) \\ x & \equiv & 0(\mod 13) \end{cases}$$

de la segunda ecuación tenemos:

$$x = 19t_1 + 1$$

$$19t_1 + 1 \equiv 4(\mod 14)$$

$$14t_1 + 5t_1 + 1 \equiv 4(\mod 14)$$

y como $14t_1 \equiv 0(\mod 14)$ Entonces

$$5t_1 + 1 - 1 \equiv 4 - 1(\mod 14)$$

y como $5t_1 \equiv 3(\mod 14)$

$\overline{5}t_1 \equiv \overline{3} \qquad Z_{14}$

y sabemos que $\overline{5}^{-1} = \overline{3}$

$\overline{3} \cdot \overline{5}t_1 \equiv \overline{3} \cdot \overline{3} \qquad Z_{14}$

$t_1 \equiv \overline{9} \qquad Z_{14}$

Luego $t_1 = 14t_2 + 9$

Reemplazo t_1 en x.

$$x = 19 \cdot (14t_2 + 9) + 1 = 266t_2 + 171 + 1 = 266t_2 + 172$$

$$\boxed{\mathrm{x} = 266\mathrm{t}_2 + 172}$$

luego $x \equiv 0(\mod 13)$ entonces $266t_2 + 172 \equiv 0(\mod 13)$

luego reducimos $266 = 13 \cdot 20 + 6$ y $13 \cdot 20 \equiv 0(\mod 13)$
$172 = 13 \cdot 13 + 3$ y $13 \cdot 13 \equiv 0(\mod 13)$

nos queda

$$6t_2 + 3 \equiv 0(\mod 13)$$

$$6t_2 \equiv -3(\mod 13)$$

sumamos 13 m.a.m

$$6t_2 + 13 \equiv -3 + 13(\mod 13)$$
$$6t_2 \equiv 10(\mod 13)$$

dividimos por 2 m.a.m

$$3t_2 \equiv 5(\mod 13)$$

y como $\overline{3}^{-1} = \overline{9}$
$\overline{9} \cdot \overline{3}x = \overline{9} \cdot \overline{5} \qquad Z_{13}$

$t_2 = \overline{45} \qquad Z_{13}$

Reduciendo $45 = 3 \cdot 13 + 6$ y como $3 \cdot 13 \equiv 0(\mod 13)$
$t_2 = 6(\mod 13)$

Luego $t_2 = 13k + 6$ y reemplazo en x nuevamente.

$x = 266t_2 + 172 = 266 \cdot (13k + 6) + 172 = 3458k + 1596 + 172$

$x = 3458k + 1768$

$\boxed{\mathrm{x} = 3458\mathrm{k} + 1768}$

ok ahora sabemos la pinta que tiene el número y que $x < 99999$

por lo tanto $3458k + 1768 < 99999$

Entonces $k < 28,40$ y el número debe ser $k = 28$

$x = 3458 \cdot 28 + 1768 = \boxed{98592}$