Primer Parcial
Comisión TN
Tema 1
23/06/2016

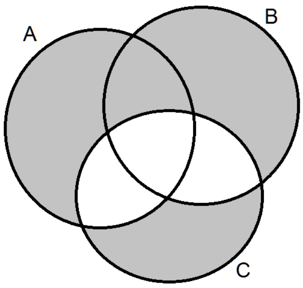
Nombre y apellido:.. D.N.I...................................

Todas las respuestas deben estar justificadas. Un resultado aislado, no acompañado de explicación se considerará como problema no resuelto.

1. *a*) Usando Algebra de Conjuntos, verifique si.

$$B \cap [(B^c \cup A^c) \cup (A \cup B)^c] = B - A$$

b) Escribe en símbolos la zona sombreada.



Expresión símbolica:

Solución:

a)

$$B \cap [(B^c \cup A^c) \cup (A \cup B)^c] = B - A$$

Ley de Morgan

$$B \cap [(B \cap A)^c \cup (A \cup B)^c] = B - A$$

Neutro para la unión

$$B \cap (B \cap A)^c = B - A$$

Ley de Morgan

$$B \cap (B^c \cup A^c) = B - A$$

Distributiva de intersección respecto de la unión.

$$(B \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = B - A$$

$$\phi \cup (B \cap A^c) = B - A$$

$$B \cap A^c = B - A$$

$$B - A = B - A$$

b)

$$(A \cup B \cup C) - [(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

o bien

$$(A \cup B)^c \cup [(A \cup B) - C]$$

o bien

$$[(A \cap C) \cup (B \cap C)]^c$$

2. Determine para que valores de $n \in N$ es verdadera la desigualdad

$$2^n > n^2 + 4n + 5$$

Solución:

Paso 1: Si $n = 7$, obtenemos $2^7 = 128 > 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 = 82$,

o sea, cuando $n = 7$ la desigualdad es correcta.

Paso 2: (Hipótesis Inductiva) Se supone que la desigualdad es verdadera para un cierto valor de $n = k$, o sea, $2^k > k^2 + 4k + 5$.

Paso 3: Finalmente a partir de la hipótesis inductiva, se desea probar la Tesis dada por

$$2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$$

.

Al multiplicar la desigualdad dada en la hipótesis inductica por 2, obtenemos

$$2^{(k+1)} > 2k^2 + 8k + 10$$

Transformando el segundo miembro de esta desigualdad obtenemos

$$2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + k^2 + 2k$$

Teniendo en cuenta que $k^2 + 2k > 0$ para todo $k \geq 7$, podemos deducir que

$$2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$$

obteniendo lo que se requeria demostrar (Tesis).

3. Pruebe que n(n+1)(n+2)(n+3) es múltiplo de 24 para cualquier entero n.

Solución:
Debemos probar que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ es múltiplo de 6 y 4 simultaneamente, y como el producto de tres números consecutivos siempre es múltiplo de 6, ahora deberíamos probar que también es múltiplo de 4.

si $n = 2k$ (par) resulta:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)$$

desarrollando y simplificando $\cdots 16k^4 + 48k^3 + 24k^2 + 12k = 4 \cdot (4k^4 + 12k^3 + 6k^2 + 3k) = 4q$ luego si n es par es múltiplo de 4 y 6 por lo tanto es múltiplo de 24.

Si $n = 2k + 1$ (impar) resulta:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (2k+1)(2k+1+1)(2k+1+2)(2k+1+3) =$$

$$= (2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4) = 4 \cdot (4k^4 + 12k^3 + 6k^2 + 3k)(2k+4) = 4t$$

luego si n es impar es múltiplo de 4 y 6 por lo tanto para cualquier n es múltiplo de 24.

4. Resuelve la ecuación diofántica.

$$14x + 5y = 13$$

Solución:

Como $(14:5)|13$ entonces tiene solución.

$$14 = 5 \cdot 2 + 4$$
$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

Despejamos el *UNO* de la segunda ecuación

$$5 - 4 \cdot 1 = 1$$

Despejamos el *CUATRO* de la primer ecuación y lo reemplazamos en la segunda.

$$5 - (14 - 5 \cdot 2) \cdot 1 = 1$$

$$5 - 14 + 5 \cdot 2 = 1$$

$$14 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 1$$

multiplicando por 13 ambos miembros

$$14 \cdot (-13) + 5 \cdot 39 = 13$$

Luego $x_0 = -13$ y $y_0 = 39$

Y la solución general:

$$x = -13 + 5k$$

$$y = 39 - 14k$$

5. Hallar (1717:1212) por el método de Euclides.

$$1717 = 1212 \cdot 1 + 505$$
$$1212 = 505 \cdot 2 + 202$$
$$505 = 202 \cdot 2 + 101$$
$$202 = 101 \cdot 2 + 0$$

$(1717 : 1212) = 101$

6. Hallar los posibles números enteros positivos x e y tales que

$$x^2 - y^2 = 101$$

Solución:

$$(x - y) \cdot (x + y) = 101$$

la única factorzación posibles es 1.101 y por lo tanto,

$$x - y = 1$$

$$x + y = 101$$

Sol:$(x, y) = (51, 50)$

7. Encuentre el menor número de de tres cifras tal que deja un resto de 5 al divirlo por 11 y un resto de 3 al dividirlo por 17.

Solución:

$$x \equiv 5(11)$$
$$x \equiv 3(17)$$

(Ec.1)

$$x = 11t_1 + 5$$

y

$$11t_1 + 5 \equiv 3(17)$$
$$11t_1 \equiv -2(17)$$
$$11t_1 \equiv 15(17)$$

Luego $11 \cdot 6 = 66$ y $t \equiv 6(17)$

$$t_1 = 17t_2 + 6$$

Reemplazo en la (Ec. 1)

$$x = 11 \cdot (17t_2 + 6) + 5$$
$$x = 187t_2 + 66 + 5$$
$$x = 187t_2 + 71$$

Luego el menor número de tres cifra es cuando $t_2 = 1$, o sea , $x = 258$