Primer Parcial RESUELTO
Comisión TN
Tema 2
23/06/2016

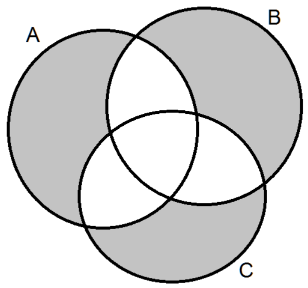
Nombre y apellido:... D.N.I...................................

Todas las respuestas deben estar justificadas. Un resultado aislado, no acompañado de explicación se considerará como problema no resuelto.

1. *a*) Usando Algebra de Conjuntos, verifique si.

$$(A - B) \cup (A - B^c) = A$$

b) Escribe en símbolos la zona sombreada.



Expresión símbolica:

Solución:

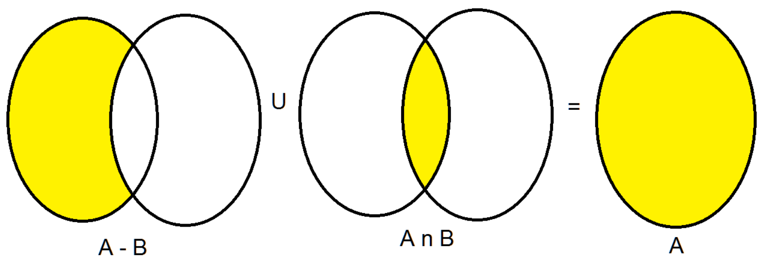
a)

$$(A - B) \cup (A - B^c) = A$$

aplicamos definición de resta de conjuntos

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A$$

Luego



Otra Solución usando sólo Álgebra:
Si consideramos

$$(A - B) \cup (A - B^c) = A$$

$$B^c \cup (A - A) = A$$

$$A \cup \phi = A$$

b) La expresión simbólica es:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

2. Demostrar por inducción, que si n es un número impar, $7^n + 1$ es divisible por 8.

Solución:

$P(1): 7^1 + 1 = 8$ y $8|8$

Suponemos que $P(k): 7^k + 1$ es V y como k debe ser impar $k = 2q + 1$ lo expresamos asi:$7^{2q+1} + 1$

luego nuestra meta ES PROBAR que P(q+1) es V. O sea, $8|7^{2(q+1)+1} + 1$

para ello $7^{2q+2+1} + 1 = 7^{2q+1} \cdot 7^2 + 1 = 49 \cdot 7^{2q+1} + 1 = 48 \cdot 7^{2q+1} + 7^{2q+1} + 1$ y como $8|48 \cdot 7^{2q+1}$ y $8|7^{2q+1} + 1$ (por tesis inductiva).

Entonces
$8|48 \cdot 7^{2q+1} + 7^{2q+1} + 1$

y por lo tanto, $8|7^n + 1$ para n impar

3. Pruebe que n(n+1)(n+2) es múltiplo de 6 para cualquier entero n.

Solución:
Como entre dos números consecutivos uno de ellos siempre es par, entonces $n(n+1)$ es *par* ,y entre tres números consecutivos uno es múltiplo de 3. Entonces $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6, por ser múltiplo de 2 y 3 simultanemente.

*Otra forma:*Por inducción Matemática

$P(1)$: $1(1+1)(1+2) = 6$ y $6|6$

suponemos que para $P(k)$ es V. O sea, $6|k(k+1)(k+2)$

Luego debemos probar que para $P(k+1)$ es V. O sea $(k+1)(k+2)(k+3)$ es V.

$k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)$ luego $6|k(k+1)(k+2)$ (por Hipótesis inductiva) y como (k+1)(k+2) es par entonces, $6|3(k+1)(k+2)$. Por lo tanto,

$$6|n(n+1)(n+2)$$

4. Resuelve la ecuación diofántica.

$$16x + 7y = 20$$

Solución:

$(16:7)|20$ tiene solución

$$16 = 7 \cdot 2 + 2$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Despejamos de la segunda el *uno*, $1 = 7 - 2 \cdot 3$ y de la segunda el *dos* $2 = 16 - 7 \cdot 2$, y remplazamos

$$1 = 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3$$
$$1 = 7 - 16 \cdot 3 + 7 \cdot 6 = 16 \cdot (-3) + 7 \cdot (7)$$

Multiplicamos por 20 ambos miembros:

$$16 \cdot (-60) + 7 \cdot (140) = 20$$

$x_0 = -60$ y $y_0 = 140$

Solución General:

$$x = -60 + 7 \cdot k$$
$$y = 140 - 16 \cdot k$$

5. Hallar (906:1963) por el método de Euclides.

Solución:

$$1963 = 906 \cdot 2 + 151$$
$$906 = 151 \cdot 6 + 0$$

Entonces: $(906 : 1963) = 151$

6. Halle todas las soluciones enteras de la ecuación

$$xy - 3x - 2y = 15$$

Solución:

$$x \cdot (y - 3) - 2y = 15$$

sumando 6 ambos miembros nos queda:

$$x \cdot (y - 3) - 2y + 6 = 15 + 6$$
$$x \cdot (y - 3) - 2 \cdot (y - 3) = 21$$
$$(x - 2) \cdot (y - 3) = 21$$

Luego como $21 = 3 \cdot 7$ tenemos 4 posibilidades:

$x-2$	$y-3$	x	y
3	7	5	10
7	3	9	6
21	1	23	4
1	21	3	24

7. Halle el menor entero mayor que 1 tal que al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9 deja resto 1.

Solución:

$n-1$ debe ser múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, por lo tanto el menor posible cumple $n-1 = mcm(2,3,4,5,6,7,8,9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^7 = 2520$, y la respuesta es $n = 2521$.