Primer parcial
Tema 1
8/11/2018

Nombre y apellido:..

1. Demostrá que f es una transformación lineal.$f : \Re^3 \to \Re^2 / f(x,y,z) = (3x - 2y, 2y + z)$
Solución:

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ $v = (x_2, y_2, z_2)$

(i) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$f(u + v) = [3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2); 2(y_1 + y_2) + z_1 + z_2]$

$f(u + v) = (3\,x_1 + 3\,x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2; 2\,y_1 + 2\,y_2 + z_1 + z_2)$

$f(u + v) = (3\,x_1 + 3\,x_2 - 2\,y_1 - 2\,y_2; 2\,y_1 + 2\,y_2 + z_1 + z_2)$

$f(u + v) = (3\,x_1 - 2\,y_1; y_1 2\,y_1 + z_1) + (3\,x_2 - 2\,y_2; y_2 2\,y_2 + z_2)$

$f(u + v) = f(u) + f(v)$ cumple

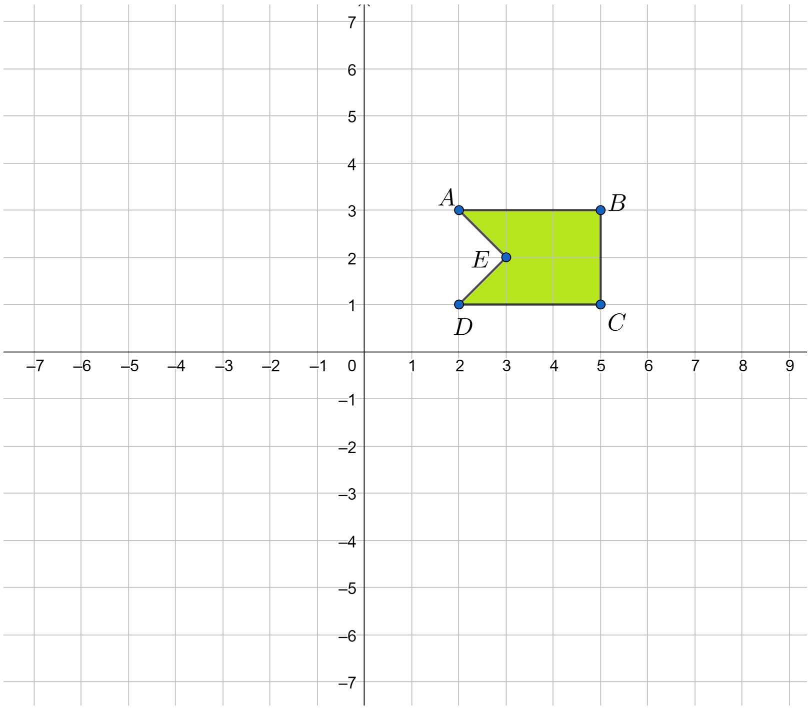
(ii) $f(\lambda\,u) = f(\lambda\,(x,y,z)) = f(\lambda\,x, \lambda\,y, \lambda\,z) = (3\lambda\,x - 2\lambda\,y; 2\lambda\,y + \lambda\,z) = \lambda\,(3x - 2y; 2y + z)$

$f(\lambda\,u) = \lambda\,f(u)$ cumple

$f(0,0,0) = (0,0)$

2. Realizá los movimientos $T : \Re^2 \to \Re^2$ y deduce la matriz de transformación que se ajuste a cada movimiento. Realiza el dibujo.

a) Rotación con centro en el origen de 90° sentido anti-horario.
b) Reflexión respecto al eje y.
c) Compresión $k = \frac{1}{2}$ respecto a los dos ejes.



Solución:

$$A_1 = A_{90^\circ} = \begin{pmatrix} cos\,90^\circ & -sen\,90^\circ \\ sen\,90^\circ & cos\,90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Reflexión: $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Compresión: $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Matriz de Composición: $A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

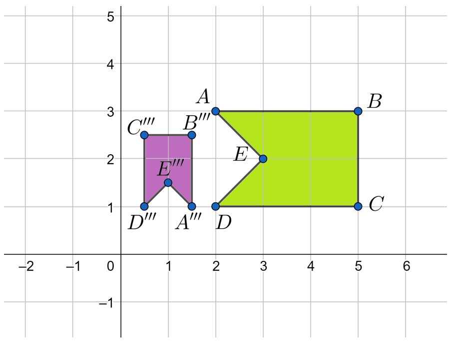
$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$C''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$D''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$



3. Decida si existe una transformación lineal f que satisface las condiciones: $f : \Re^2 \to \Re^2$, $f(1,2) = (2,6)$, $f(-1,0) = (-2,0)$ en caso afirmativo, Si es única. Encontrar una expresión de $f(x)$.
Solución:
$(x, y) = \alpha\,(1,2) + \beta\,(-1,0) = (\alpha - \beta, 2\alpha)$

Resolviendo el sistema obtenemos $\alpha = \frac{1}{2}y$, $\beta = \frac{1}{2}y - x$
$(x, y) = \frac{1}{2}y\,(1, 2) + \left(\frac{1}{2}y - x\right)(-1, 0)$

Aplicamos Transformación lineal

$$T(x, y) = \frac{1}{2}y\,T(1, 2) + \left(\frac{1}{2}y - x\right)T(-1, 0)$$

$$T(x, y) = \frac{1}{2}y\,(2, 6) + \left(\frac{1}{2}y - x\right)(-2, 0)$$

$$T(x, y) = (y, 3y) + (-y + 2x, 0) = (2x, 3x)$$

$$\boxed{T(x, y) = (2x, 3x)}$$

La función es única ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

4. Diagonalizar $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Solución:
Cálculo del polinómio característico y los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\,\lambda + 16 = (\lambda - 1)\cdot(\lambda - 4)\cdot(\lambda - 4) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad m = 1$
$\lambda_2 = 4 \quad m = 2$

Autovectores propios.

$$H(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad H(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. Identificar las siguientes cónica mediante una rototraslación conveniente y graficar.

$$3x^2 + 8x\,y + 9y^2 = 6$$

Solución:

$$(x \quad y)\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 9\end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico $\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & 9-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-12\lambda+11=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-11)=0$

$\lambda_1 = 1 \quad m=1$
$\lambda_2 = 11 \quad m=1$

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-1 & 4\\ 4 & 9-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-11 & 4\\ 4 & 9-11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$H(\lambda_1)=\left\{\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\right\} \quad , \quad H(\lambda_2)=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

los Ejes Nuevos están constituidos por: $\left\{v_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

$$P=\begin{pmatrix}-2 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x' \quad y')\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=6$$

$$(x')^2+11(y')^2=6$$